STATISTIKA MATEMATIKA

BERORIENTASI PEMBELAJARAN BERBASIS RISET

Ika Krisdiana
Wasilatul Murtafiah
Titin Masfingatin

UNIPMA Press
WE GOT IT

STATISTIKA MATEMATIKA BERORIENTASI PEMBELAJARAN BERBASIS RISET

STATISTIKA MATEMATIKA BERORIENTASI PEMBELAJARAN BERBASIS RISET

IKA KRISDIANA
WASILATUL MURTAFIAH
TITIN MASFINGATIN

UNIPMA Press
WE GOT IT

STATISTIKA MATEMATIKA BERORIENTASI PEMBELAJARAN BERBASIS RISET

Penulis:
Ika Krisdiana
Wasilatul Murtafiah
Titin Masfingatin

Editor:
Agus

PerancangSampul:
Ika Krisdiana

PenataLetak:
Titin Masfingatin

CetakanPertama, September 2018

DiterbitkanOleh:
UNIPMA PRESS
Universitas PGRI Madiun
JI. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
Telp. (0351) 462986, Fax. (0351) 459400
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: www.kwu.unipma.ac.id

ISBN:978-602-0725-00-0

KATA PENGANTAR

Dengan menyebut nama Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, kami panjatkan puja dan puji syukur atas kehadirat-Nya, yang telah melimpahkan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya kepada kami, sehingga kami dapat menyelesaikan pembuatan buku ini dengan tujuan dapat membantu mahasiswa dalam perkuliahan terutama dalam Pembelajaran Berbasis Riset (PBR).

Buku ini telah kami susun dengan maksimal dan mendapatkan bantuan dari berbagai pihak sehingga dapat memperlancar pembuatan buku ini. Untuk itu kami menyampaikan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah berkontribusi dalam pembuatan buku ini.

Terlepas dari semua itu, kami menyadari sepenuhnya bahwa masih ada kekurangan baik dari segi susunan kalimat maupun tata bahasanya. Oleh karena itu kami menerima segala saran dan kritik dari pembaca agar kami dapat memperbaiki buku ini.

Akhir kata kami berharap semoga buku ini dapat memeberikan manfaat maupun inspirasi terhadap pembaca.

Madiun, September 2018

Penyusun

DAFTAR ISI

BAB 1
PELUANG

1.1 Ruang Sampel

Dalam mempelajari statistika yang menjadi perhatian kita adalah bagaimana menyajikan dan menafsirkan dari hasil yang berkemungkinan terjadi pada penelitian yang dirancang. Contohnya melemparkan sebuah dadu. Kemungkinan yang muncul dalam pelemparan itu adalah munculnya mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, atau 6. Dalam hal ini dikatakan sebagai percobaan pelemparan sebuah dadu. Percobaan adalah tiap proses yang menghasilkan data mentah. Contoh yang lain adalah pelemparan koin atau mata uang logam, kemungkinan hasil yang muncul dalam kejadian itu adalah muka dan belakang.

Definisi 1.1

Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan statistika disebut ruang sampel dan dinyatakan dengan lambang S Anggota dari suatu ruang sampel disebut titik sampel. Berarti, peristiwa yang mungkin terjadi pada sebuah percobaan disebut titik sampel.

Contoh 1.1

Dalam pelemparan sebuah dadu, tentukan ruang sampelnya!

Penyelesaian:

Sampel S sebagai berikut :

S = (1,2,3,4,5,6)

Banyaknya anggota dari ruang sampel n (S) = 6

1.2 Kejadian

Definisi 1.2

Kejadian atau peristiwa merupakan himpunan bagian dari ruang sampel S.

Contoh 1.2

Pada pelambungan sebuah dadu, kemungkinan munculnya mata dadu genap adalah ....

Penyelesaian:

Mata Dadu dimisalkan dengan S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, sehingga mata dadu genap adalah dimisalkan dengan A = {2,4,6}.

Himpunan A ini merupakan bagian dari ruang sampel S yang diperoleh dari pelambungan sebuah dadu. Himpunan A tersebut adalah contoh dari sebuah kejadian didalam ruang sampel S.

Teorema 1.1

Pada ruang sampel S yang berhingga, banyaknya kejadian pada (didalam) S adalah $2^{n(s)}$.

Contoh teorema 1.1

Pada pelemparan sebuah mata uang, tentukan kemungkinan kejadian yang muncul!

Penyelesaian:

S = (A,G)

K I = (A) ; K II = (G) ; K III = (A,G) ; K IV = (Ø)

n (S) = 2 → n (K) = $2^{n(s)} = 2^2 = 4$

1.3 Peluang

Definisi 1.3

Peluang adalah suatu kemungkinan dari peristiwa yang terjadi.Jika suatu kejadian A yang bersesuaian dengan suatu eksperimen dengan ruang sampel berhingga S yang setiap titik sampelnya berkemungkinan sama untuk terjadi (muncul), maka peluang kejadian A, disajikan dengan P (A) definisikan sebagai berikut :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Keterangan :

P (A) : Peluang A

n (A) : Banyaknya kejadian A

n (S) : Banyaknya Aanggota ruang sampel A

Contoh 1.3

Pada percobaan melempar sebuah uang koin berisi angka (A) dan gambar (G) dengan sebuah dadu bermata 1 sampai 6 bersama-sama sebanyak satu kali. Berapa peluang munculnya pasangan uang koin sisi gambar dan dadu mata ganjil?

Penyelesaian:

Daftar 1.1

Pelemparan sebuah koin dan dadu

Dadu / Koin	1	2	3	4	5	6
A	(A,1)	(A,2)	(A,3)	(A,4)	(A,5)	(A,6)
G	(G,1)	(G,2)	(G,3)	(G,4)	(G,5)	(G,6)

Banyaknya kejadian munculnya pasangan gambar dan mata dadu ganjil ada 3, yaitu (G,1), (G,3), dan (G,5). Peluang kejadian munculnya pasangan gambar dan mata dadu ganjil adalah :

$$P(\text{gambar dan ganjil}) = \frac{n(\text{gambar dan ganjil})}{n(S)}$$

$$P(\text{gambar dan ganjil}) = \frac{3}{12}$$

BAB 2

PEUBAH ACAK

2.1 Pengertian Peubah Acak

Istilah percobaan telah digunakan untuk menjelaskan setiap proses yang menghasilkan pengukuran yang berkemungkinan. Sering yang menarik perhatian kita bukan titik sampel itub sendiri melainkan hanya gambaran numerik dari hasil. Sebagai contoh, ruang sampel yang memberi gambaran menyeluruh dari tiap hasil yang mungkin bila satu mata uang dilantunkan tiga kali dapat dituliskan sebagai S = {MMM, MMB, MBM, BMM, MBB, BMB, BBM, BBB}. Bila yang diperlukan hanya banyak muka yang muncul, maka hasil numerik untuk (MMM) 3, (MMB) 2, (BMB) 1, (BBB) 0. Bilangan 0,1, 2, dan 3 merupakan pengamatan acak yang ditentukan oleh hasil percobaan. Bilangan tersebut dapat dipandang sebagai nilai yang diperoleh suatu peubah acak X, yang dalam hal ini menyatakan banyak kali 'muka' yang muncul bila suatu mata uang dilantunkan tiga kali.

Definisi 2.1

Suatu fungsi bernilai real yang harganya ditentukan oleh tiap anggota dalam ruang sampel disebut suatu peubah acak.

Suatu peubah acak akan dinyatakan dengan huruf besar, misalnya X, sedangkan harganya dinyatakan dengan huruf kecil yang berpadanan, misalnya x. Dalam contoh lantunan uang diatas, peubah acak X mempunyai nilai 2 untuk semua anggota dalam himpunan bagian A = {MMB, MBM, BMM} dari ruang sampel S.

Jadi tiap nilai x yang mungkin menyatakan suatu kejadian yang merupakan himpunan bagian dari ruang sampel percobaan tersebut.

Contoh 2.1

Tiga orang petani : Pak Ali, Badu, dan Cokro emnitipkan pecinya di pagi hari pada seorang anak. Sore harinya si anak mengembalikan peci tersebut secara acak pada ketiga petani. Bila Pak Ali, Badu, dan Cokro dalam urutan seperti itu menerima peci tersebut dari si anak maka tuliskanlah titik sampel untuk semua urutan yang mungkin mendapatkan peci tersebut dan kemudian cari nilai m dari peubah acak M yang mungkin yang menyatkan jumlah urutan yang cocok.

Penyelesaian:

Bila A, B, dan C menyatakan masing-masing peci yang dibagikan berturut pada Pak nAli, Badu, dan Cokro maka jumlah urutan pembagian peci yang mungkin dan urutan yang cocok adalah

Kejadian yang mungkin	M
ABC	3
ACB	1
BAC	1
BCA	0
CAB	0
CBA	1

Definisi 2.2

Jika suatu ruang sampel mengandung titik yang berhingga banyaknya atau suatu deretan anggota yang banyaknya sama dengan banyaknya bilangan bulat, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel diskrit dan peubah acak yang didefinikan pada ruang sampel tersebut adalah peubah acak diskrit.

Contoh 2.2

Penelitian mengenai jarak yang ditempuh bila suatu mobil merek tertentu dijalankan pada jalan tertentu dengan 5 liter bensin. Bila dimisalkan jarak sebagai suatu peubah acak yang diukur dengan suatu derajat ketelitian tertentu maka jelas bahwa kemungkinan jarak yang ditempuh dalam ruang sampel tak berhingga banyaknya sehingga tidak mungkin dasamakan dengan banyaknya bilangan bulat.

Definisi 2.3

Bila ruang sampel mengandung titik sampel yang berhingga banyaknya dan sama banyaknya dengan banyak titik pada sepotong garis, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel kontinu dan peubah acak yang didefinisikan di atasnya disebut peubah acak kontinu

Contoh 2.3:

Bila kita ingin mencatat lamanya waktu yang diperlukan oleh suatu reaksi kimia, maka sekali lagi selang waktu yang dapat dibuat untuk ruang sampel banyaknya takberhingga dan takberhitung.

Peubah Acak Kontinu menyatakan data yang diukur seperti semua tinggi, berat, temperatur, jarak, atau jangka hidup yang mungkin, sedangkan peubah acak diskrit menggambarkan data cacah, seperti banyak barang yang cacat dalam sampel sebesar k barang atau bayak korban meninggal dijalan raya per tahun.

Soal Latihan

1. Carilah distribusi peluang banyaknya pita jazz bila empat pita dipilih secara acak dari suatu kumpulan yang terdiri atas lima pita jazz, dua pita klasik, dan tiga pita lagu daerah. Nyatakanlah hasilnya dalam rumus.
2. Carilah rumus distribusi peluang peubah acak X yang menyatakan hasil yang muncul bila sebuah dadu dilantunkan sekali.
3. Suatu pengiriman enam pesawat televisi berisi dua yang rusak. Sebuah hotel membeli tiga pesawat secara acak dari kelompok tadi. Bila X menyatakan banyaknya pesawat yang rusak yang dibeli hotel tersebut, carilah distribusi peluang X.
4. Suatu uang logam diberati sehingga kemungkinan muncul muka dua kali lebih besar dari pada belakang. Bila uang tersebut dilantunkan tiga kali, carilah distribusi peluang banyaknya muka yang muncul.

2.2 Distribusi Peluang Diskrit

Suatu peubah acak diskrit mendapat tiap nilai dengan peluang tertentu

Definisi 2.4

Fungsi f(x) adalah suatu fungsi peluang atau distribusi peluang suatu peubah acak diskret X bila untuk setiap hasil x yang mungkin:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

Contoh 2.4

Hitunglah distribusi peluang jumlah bilangan yang muncul bila dua dadu dilantunkan!

Penyelesaian:

Misalkan X peubah acak dengan nilai x, yang menyatakan semua jumlah yang mungkin. Maka x dapat bernilai dari 2 sampai 12. Maka distribusi peluangnya adalah:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Definisi 2.5

Distribusi kumulatif F(x) suatu peubah acak X dengan distribusi peluang f(x) dinyatakan oleh $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$

Contoh 2.5

Carilah distribusi kumulatif untuk jumlah muka bila satu mata uang dilantunkan empat kali!

Penyelesaian:

Karena ada 2^4 = 16 titik dalam ruang sampel yang berkemungkinan sama maka penyebut untuk semua peluang, jadi juga untuk fungsi distribusi adalah 16. Untuk mencari banyaknya cara memperoleh tiga muka adalah $\binom{4}{3} = 4 \text{ cara}$. Jadi distribusi peluang f(x) = P(X = x) adalah

$$\mathrm{f(x)} = \frac{\binom{4}{x}}{16}, \quad \mathrm{x} = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Dari rumus distribusi peluang diatas didapatkan:

$\mathrm{f}(0) = \frac{1}{16}, \mathrm{f}(1) = \frac{1}{4}, \mathrm{f}(2) = \frac{3}{8}, \mathrm{f}(3) = \frac{1}{4}, \mathrm{f}(4) = \frac{1}{16}.$ Maka distribusi kumulatifnya adalah:

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0 & \text{bila } \mathrm{x} < 0 \\ \frac{1}{16} & \text{bila } 0 \leq \mathrm{x} < 1 \\ \frac{5}{16} & \text{bila } 1 \leq \mathrm{x} < 2 \\ \frac{11}{16} & \text{bila } 2 \leq \mathrm{x} < 3 \\ \frac{15}{16} & \text{bila } 3 \leq \mathrm{x} < 4 \\ 1 & 1 \end{cases}$$

Soal Latihan

1. Suatu pengiriman enam pesawat televisi berisi dua yang rusak. Sebuah hotel membeli tiga pesawat secara acak dari kelompok tadi. Bila X menyatakan banyaknya pesawat yang rusak yang dibeli hotel tersebut. Carilah distribusi kumulatif peubah acak X. Dengan menggunakan F(x), carilah
   a. P(X=1)
   b. P($0 < X \leq 2$)
2. Suatu uang logam diberati sehingga kemungkinan muncul muka dua kali lebih besar dari pada belakang. Bila uang tersebut dilantunkan tiga kali, carilah distribusi kumulatif peubah acak X yang menyatakan banyak muka yang muncul. Dengan menggunakan F(x), carilah
   a. $\mathrm{P}(1 \leq \mathrm{X} < 3)$
   b. $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 2)$

2.3 Distribusi Peluang Kontinu

Suatu peubah acak kontinu mempunyai peluang nol pada setiap titik x. Karena itu, distribusi peluangnya tidak mungkin disajikan dalam bentuk tabel. Bila x kontinu maka:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(a < X < b) + P(X = b))$$
$$= P(a < X < b)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

Definisi 2.6

Fungsi f(x) adalah fungsi padat peluang peubah acak kontinu X yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R bila:

1. $f(x) \geq 0 untuksemuax \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $\mathrm{P}(\mathrm{a} < x < b) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$

Contoh 2.6

Misalkanlah peubah acak X mempunyai fungsi padat peluang

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}^2}{3}, \qquad -1 < x < 2$$
$$= 0, \qquad \text{untuk x lainnya}$$

1. Tunjukkan bahwa syarat 2 Definisi 1.6 dipenuhi!
2. Hitung $P(0 < x \leq 1)$

Penyelesaian:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{x}^2}{3}\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$
2. $\mathrm{P}(0 < x \leq 1) = \int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{x}^2}{3}\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^3}{9}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{9}$

Soal Latihan!!

1. Suatu peubah acak X yang dapat memperoleh setiap nilai antara x = 1 dan x = 3 mempunyai fungsi peluang f(x) = $\frac{1}{2}$.
    a. Hitunglah P(2 < X <2,5)
    b. Hitunglah $P(X \leq 1,6)$
    c. Hitunglah P(X>2)
2. Suatu peubah acak X yang dapat memperoleh setiap harga antara x = 2 dan x = 5 mempunyai fungsi padat $\mathrm{f(x)} = \frac{2(1+x)}{27}$. Hitunglah
    a. P(X < 4)
    b. P(3 < X < 4)

2.4 Distribusi Peluang Gabungan

Bila X dan Y dua peubah acak, distribusi peluang terjadinya secara serentak dapat dinyatakan dengan fungsi f(x,y). Biasanya f(x,y) dinamakan distribusi peluang gabunganX dan Y. Jadi dalam kasus diskrit yang dapat didaftar f(x,y) = P(X = x,Y = y).

Definisi 2.7

Fungsi f(x,y) adalah fungsi peluang gabungan peubah acak diskrit X dan Y bila

1. $\mathrm{f(x,y)} \geq 0 \mathrm{untuk\ semua\ (x,y)}$
2. $\sum_{\mathrm{x}} \sum_{\mathrm{y}} \mathrm{f(x,y)} = 1$
3. $\mathrm{P[(X,Y)} \in \mathrm{A]} = \sum_{\mathrm{A}} \sum \mathrm{f(x,y) untuk\ tiap\ daerah\ A\ di\ bidang\ xy}$

Contoh 2.7

Dua kelereng dipilih secara acak dari sebuah kotak berisi 3 kelereng biru, 2 kelereng merah, dan 3 kelereng hijau. Jika X menyatakan kelereng berwarana biru yang terambil, dan Y menyatakan kelereng berwarna merah yang terambil, tentukan

a. fungsi peluang gabungan f(x,y)
b. P[(X,Y) $\in$A] jika A = {(x,y)$|$ x+y≤ 1}

Penyelesaian:

Pasangan harga-harga X dan Y adalah (1,0), (1,1), (2,0), (0,2) , (0,1) , (0,0)

f(0,0) = peluang terambil 2 bola berwarna hijau

f(1,1) = peluang teambil 1 bola berwarna biru dan berwarna merah ,dst.

$n(S) = 8C_2 = \dfrac{8!}{2!6!} = 28$

f(0,0) = $\dfrac{3C_2}{28} = \dfrac{3}{28}$ f(0,1) = $\dfrac{3C_2.3C_1}{28} = \dfrac{6}{28}$

f(1,1) = $\dfrac{3C_1.2C_1}{28} = \dfrac{6}{28}$ f(0,2) = $\dfrac{2C_2}{28} = \dfrac{1}{28}$

f(1,0) = $\dfrac{3C_1.3C_1}{28} = \dfrac{9}{28}$ f(2,0) = $\dfrac{3C_2}{28} = \dfrac{3}{28}$

Jadi distribusi peluang gabungan dapat ditulis

X \ Y	0	1	2
0	3/28	6/28	1/28
1	9/28	6/28	
2	3/28		

P[X+Y≤ 1] = P[X=0, Y=0] + P[X=0, Y=1] + P[X=1, Y=0]

= f(0,0) + f(0,1) + f(1,0)

= $\dfrac{3}{28} + \dfrac{6}{28} + \dfrac{9}{28} = \dfrac{18}{28}$

Definisi 2.8

Fungsi f(x,y) adalah fungsi peluang gabungan peubah acak kontinu X dan Y bila

1. $f(x, y) \geq 0$ untuk semua (x, y)
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx\, dy = 1$

3. $P[(X,Y) \in A] = \int_A \int f(x,y)\,dx\,dy$ untuk tiap daerah A di bidang xy

Contoh 2.8

Pandang fungsi padat gabungan

f(x,y) = $\begin{cases} kx(1+3y^2) & ,0<x<2,\ 0<y<1 \\ 0 & ,\ untuk\ x,y\ yang\ lain \end{cases}$

a. Tentukan k agar f merupakan fungsi distribusi peluang gabungan

b. Hitung P[(X,Y) $\in$A] jika A = {(x,y)|0<x< 1, ¼ <y< ½ }

Penyelesaian

a. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int_0^1\int_0^2 kx(1+3y^2)\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{k}{2}x^2(1+3y^2)\Big|_0^2\,dy = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2}\int_0^1 (4-0)(1+3y^2)\Big|_0^2\,dy = 1$$

$$\Leftrightarrow 2k(y+y^3)\Big|_0^1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2k(2) = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{4}.$$

Jadi agar f merupakan fpg maka k = $\frac{1}{4}$.

b. P[(X,Y) $\in$A] = $\int_{1/4}^{1/2}\int_0^1 \frac{1}{4}x(1+3y^2)\,dx\,dy$

$$= \frac{1}{8}\int_{1/4}^{1/2} x^2(1+3y^{2)}\Big|_0^1\, dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_{1/4}^{1/2}(1+3y^2)dy$$

$$= \frac{1}{8}\left(y+y^3\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{64}\right)\right]$$

$$= \frac{23}{64}$$

Soal Latihan

1. Dari suatu bungkus buah-buahan yang berisi tiga jeruk, dua mangga, dan tiga pisang dipilih secara acak empat buah. Bila X menyatakan banyaknya jeruk dan Y banyaknya mangga dalam sampel tersebut, hitunglah
   a. Distribusi peluang gabungan X dan Y
   b. $P[(X,Y) \in A]$, bila A daerah $\{(x,y)|x+y \leq 2)\}$
2. Dua peubah acak mempunyai fungsi padat gabungan sebagai berikut:

   f(x,y) = 4xy, 0 < x < 1, 0 < y < 1
   = 0, untuk x dan y lainnya

   a. Hitunglah peluang bahwa $0 \leq X \leq \frac{3}{4} dan \frac{1}{8} \leq Y \leq \frac{1}{2}$
   b. Hitunglah peluang bahwa Y > X
3. Dua peubah acak mempunyai fungsi padat gabungan sebagai berikut:

   f(x,y) = k(x^2 + y^2), 0 < x < 2, 1 < y < 4
   = 0, untuk x dan y lainnya

a. Carilah k
b. Hitunglah peluang bahwa 1 < X < 2 dan 2 < Y < 3
c. Hitunglah peluang bahwa $1 \leq X \leq 2$
d. Hitunglah peluang bahwa X + Y > 4

2.5 Distribusi Marginal

Jika f(x,y) diketahui maka kita dapat mencari distribusi peluang X saja dan Y saja, yaitu :

$$g(x) = \begin{cases} \sum_y f(x,y) \;, & jika\ diskret \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, & jika\ kontinu \end{cases}$$

yang disebut distribusi marginal X.

Sedangkan distribusi marginal Y

$$h(y) = \begin{cases} \sum_x f(x,y) \;, & jika\ diskret \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx, & jika\ kontinu \end{cases}$$

Contoh 2.9:

Pada contoh 1.7 tentukan:

a. Distribusi peluang marginal X
b. Distribusi peluang marginal Y

Penyelesaian

a. g(x) = $\sum_y f(x,y)$

g(0) = $\sum_y f(0,y)$ = f(0,0)+ f(0,1) + f(0,2)

$= \frac{3}{28}+\frac{6}{28}+\frac{1}{28}=\frac{10}{28}$

g(1) = $\frac{9}{28}+\frac{6}{28}=\frac{15}{28}$

g(2) = $\frac{3}{28}$

disajikan dalam tabel

X	0	1	2
g(x)	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

a. h(x) = $\sum_{x} f(x,y)$

h(0) = $\sum_{x} f(x,0)$ = f(0,0)+ f(1,0) + f(2,0)

$= \frac{3}{28}+\frac{9}{28}+\frac{3}{28}=\frac{15}{28}$

h(1) = $\frac{6}{28}+\frac{6}{28}=\frac{12}{28}$

h(2) = $\frac{1}{28}$

disajikan dalam tabel

x	0	1	2
g(x)	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$

Contoh 2.10

Pada contoh 1.8 tentukan:

a. Distribusi peluang marginal X

b. Distribusi peluang marginal Y

Penyelesaian

f(x,y) = $\begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2) & ,0 < x < 2,\ 0 < y < 1 \\ 0 & ,\ untuk\ \ x, y\ \ yang\ \ lain \end{cases}$

a. g(x) = $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} \frac{1}{4}x(1+3y^2)\,dy$

= $\frac{1}{4}x(y+y^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}x$, 0<x<2

b. h(y) = $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x(1+3y^2)\,dx$

= $(1+3y^2)\frac{1}{8}x^2\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1+3y^2)$, 0<y<1.

Dari contoh 1.10 ini terlihat bahwa **g(x).h(x) = f(x,y),** ini dikatakan bahwa **variabel random X dan Y saling bebas.**

Jadi 2 variabel random X dan Y dikatakan saling bebas, jika distribusi peluang gabungannya sama dengan perkalian distribusi peluang marginalnya.

Soal Latihan

1. Misalkan X dan Y mempunyai distribusi peluang gabungan berikut:

y \ x	2	4
1	0,10	0,15
3	0,20	0,30
5	0,10	0,15

   Carilah distribusi peluang marginal dan tentukan apakah X dan Y bebas.

2. Diketahui fungsi padat gabungan

   $f(x,y) = \frac{6-x-y}{8}$, 0 < x < 2, 2 < y < 4

   = 0, untuk x dan y lainnya

   a. Carilah fungsi padat marginal X
   b. Carilah fungsi padat marginal Y
   c. Tentukan apakah X dan Y bebas

3. Fungsi padat peluang gabungan peubah acak X dan Y adalah

   f(x,y) = 2, 0 < x < y < 1

   = 0, untuk x dan y lainnya.

   a. Carilah fungsi padat marginal X
   b. Carilah fungsi padat marginal Y
   c. Tentukan apakah X dan Y bebas

4. Fungsi padat gabungan peubah acak X dan Y adalah

   f(x, y) = 6x, 0 < x < 1, 0 < y < 1-x

   = 0, untuk x dan y lainnya

   a. Carilah fungsi padat marginal X

b. Carilah fungsi padat marginal Y

c. Tunjukkan bahwa X dan Y tidak bebas.

5. Bila X, Y, dan Z mempunyai fungsi padat peluang

$$f(x, y, z) = kxy^2z, \qquad 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 2$$
$$= 0, \quad \text{untuk x, y, dan z lainnya}$$

Carilah:

a. Hitunglah nilai k

b. Fungsi padat marginal X

c. Fungsi padat marginal Y

d. Fungsi padat marginal Z

e. Fungsi padat marginal Y dan Z

f. Hitunglah $P(X < \frac{1}{4}, Y > \frac{1}{2}, 1 < Z < 2)$

2.6 Distribusi Bersyarat

Nilai dari variabel random sebenarnya adalah kejadian yang merupakan himpunan bagian dari ruang sampel, sehingga jika A dan B merupakan kejadian yang ditentukan oleh masing-masing X=x, Y=y, maka dari definisi peluang bersyarat P(A|B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, didapat

$$P(Y=y \mid X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} = \frac{f(x,y)}{g(x)}$$

Atau sering ditulis $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$, $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$.

Perhatikan jika X dan Y bebas maka maka x tidak tergantung y sehingga f(x|y) = f(x)

Jadi $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = g(x)$, diperoleh f(x,y) = g(x).h(y).

Contoh 2.11

a. Pada contoh 2.9, tentukan P(X=0|Y=1)

b. Pada contoh 2.10, tentukan f(x|Y=y)

Penyelesaian

a. $P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{f(x,y)}{h(y)}$

$$P(X=0 \mid Y=1) = \frac{f(0,1)}{h(1)} = \frac{\frac{6}{28}}{\frac{12}{28}} = \frac{1}{2}$$

b. $f(x|Y=y)=\dfrac{f(x,y)}{h(y)}=\dfrac{\frac{1}{4}x(1+3y^2)}{\frac{1}{2}x(1+3y^2)}=\dfrac{1}{2}x$, 0<x<2.

Soal Latihan

1. Dari suatu bungkus buah-buahan yang berisi tiga jeruk, dua mangga, dan tiga pisang dipilih secara acak empat buah. Bila X menyatakan banyaknya jeruk dan Y banyaknya mangga dalam sampel tersebut, hitunglah
   a. f(yI2)
   b. P(Y = 0 I X = 2)
2. Diketahui fungsi padat gabungan
   $f(x,y)=\frac{6-x-y}{8}$, 0 < x < 2, 2 < y < 4
   = 0, untuk x dan y lainnya
   Hitunglah $P(1<Y<3|X=2)$
3. Fungsi padat peluang gabungan peubah acak X dan Y adalah
   f(x,y) = 2, 0 < x < y < 1
   = 0, untuk x dan y lainnya.
   Hitunglah $P(\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}\Big|Y=\frac{3}{4})$.
4. Fungsi padat gabungan peubah acak X dan Y adalah
   f(x, y) = 6x, 0 < x < 1, 0 < y < 1-x
   = 0, untuk x dan y lainnya
   Hitunglah $P(X>0{,}3|Y=0{,}5)$

BAB 3
DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT

Distribusi peluang diskrit tertentu dapat dinyatakan dalam diagram, dalam bentuk tabel, atau dalam bentuk formula. Bentuk apapun yang dipilih, diharapkan bentuk tersebut dapat menjelaskan karakteristik variabel random yang bersesuaian dengannya. Hal ini berarti variabel variabel random diskrit yang bersesuaian dengan eksperimen statistik tertentu secara esensial dapat dinyatakan dalam satu fungsi peluang yang sama.

Beberapa fungsi distribusi peluang diskrit yaitu distribusi uniform, distribusi binomial, distribusi multinomial, distribusi hipergeometrik, dan distribusi poisson.

3.1. DISTRIBUSI UNIFORM

Distribusi peluang diskrit yang paling sederhana adalah distribusi uniform (seragam). Distribusi tersebut merupakan distribusi variabel random diskrityang mengasumsikan bahwa semua nilai mempunyai kemungkinan yang sama untuk muncul.

Definisi 3.1

Jika pada variabel random diskrit X nilai-nilai $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ mempunyai peluang yang sama, maka variabel random X disebut mempunyai distribusi uniform diskrit jika fungsi peluangnya berbentuk sebagai berikut:

$$f(x;k) = \frac{1}{k}$$

Untuk $X = x_1, x_2, x_3, .., x_k$

Contoh 3.1

Jika sebuah dadu dilambungkan, maka semua titik sampel dii S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} mempunyai peluang yang sama untuk muncul, yaitu sebesar $\frac{1}{6}$. Pada kasus ini, diperoleh sebuah distribusi uniform diskrit yang dirumuskan oleh $f(x;6) = \frac{1}{6}$, untuk x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3.2 DISTRIBUSI BINOMIAL

Distribusi binomial adalah suatu percobaan atau eksperimen yang mempunyai dua buah kejadian, yaitu sukses atau gagal.

Eksperimen Binomial umumnya mempunyai 4 syarat, yaitu:

1. Banyaknya eksperimen merupakan bilangan tetap (*fixed number oftrial*)
2. Setiap eksperiman mempunyai dua buah hasil yang dikategorikan menjadi sukses atau gagal. Dikatakan sukses apabila sesuai dengan harapan dan keinginan.
3. Probabilitas sukses sama pada setiap eksperimen atau percobaan.
4. Eksperiment tersebut harus bebas (independent) satu sama lain, artinya hasil eksperimen yang satu tidak mempengaruhi lainnya.

Distribusi Biomial dapat dicari dengan rumus:

$$P(x) = P(X = x) = \binom{N}{x} \pi^x (1-\pi)^{N-x}$$

dengan x = 0,1,2,….N, 0< π <1

Contoh 3.2

Pelemparan 10 buah dadu homogen sekaligus. Berapa peluang nampaknya mata 6 sebanyak 8 buah?

Penyelesaian:

P(mata 6) = π = $\frac{1}{6}$

N = 10

X = 8

$$P(X=x)=\binom{N}{x}\pi^x(1-\pi)^{N-x}$$

$$P(X=8)=\binom{10}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$=0,000015$$

Ini berarti bahwa : dalam undian 10 dadu akan diperoleh mata 6 sebanyak 8 kali, terjadi kira-kira 15 kali dari tiap juta.

3.3. DISTRIBUSI MULTINOMIAL

Distribusi Multinomial adalah perluasan dari Distribusi Binomial. Bila Distribusi Binomial adalah suatu eksperimen yang mempunyai 2 kejadian, yaitu "berhasil dan gagal". Sedangkan Distribusi Multinomial adalah suatu eksperimen yang mempunyai 3 atau lebih kejadian, yaitu " berhasil,nyaris berhasil, dan gagal". Seperti peristiwa keadaan cuaca dapat digolongkan dengan menjadi cerah, mendung, atau hujan.

Misal dalam sebuah eksperimen menghasilkan peristiwa E_1, E_2, ..., E_K dengan peluang π_1 = P(E_1), π_2 = P(E_2),......,π_K = P(E_K)

dengan $\pi_1 + \pi_2 + ...+ \pi_K = 1$. Distribusi Multinomial memberikan probabilitas terjadinya X_1 kali kejadian E_1, X_2 kali kejadian E_2, X_K kali kejadian E_K dalam n ulangan yang bebas dengan $X_1 + X_2 + ...+ X_K = n$.

Sehingga probabilitas Distibusi Multinomial dinyatakan:

$$P(x_1, x_2, \dots .\, x_k) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \dots x_k!} {\pi_1}^{x_1} {\pi_2}^{x_2} \dots {\pi_k}^{x_k}$$

Contoh 3.3

Dalam pelemparan sebuah dadu sebanyak 12 kali maka tentukan peluang di dapat mata 1, mata 2,.....mata 6, masing-masing tepat dua kali!

Penyelesaian:

$$P(x_1, x_2, \dots .\, x_k) = \frac{N!}{x_1!\, x_2! \dots .\, x_k!} {\pi_1}^{x_1} {\pi_2}^{x_2} \dots {\pi_k}^{x_k}$$

$$= \frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{479.001.600}{64} \left(\frac{1}{6}\right)^{12}$$

$$= 7484400 \left(\frac{1}{2176782336}\right)$$

$$= 0{,}0034$$

3.4. DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Distribusi Hipergeometrik adalah Peluang dari suatu kejadian dari 1 buah populasi yang berukuran N dan diantara N terdapat D buah kategori tertentu dan dari populasi ini diambil berukuran n. Suatu

Distribusi Hipergeometrik dibentuk oleh suatu eksperimen yang memenuhi kondisi-kondisi berikut :

1. Populasi berukuran N (anggotanya terdiri dari N objek)
2. Setiap anggota populasi dapat dinyatakan sebagai sukses atau gagal dan terdapat D buah sukses dalam populasi, jadi p = D/N
3. Suatu sample berukuran n (anggotanya terdiri dari n objek) dipilih dari x populasi tanpa pergantian dimana setiap himpounan bagian beranggota n yang dapat dibentuk dari populasi memiliki kesempatan yang sama untuk terpilih menjadi sample.

Distribusi Hipergeometrik dapat dirumuskan dengan :

$$p(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Dengan x = 0, 1, 2, ... n dan faktor – faktor diruas kanan ditentukan oleh rumus $\binom{N}{x} = \frac{N!}{x!(N-x)!}$

Contoh 3.4

Sekelompok manusia terdiri atas 50 orang dan 3 diantaranya lahir padatanggal 1 Januari secara acak diambil 5 orang. Berapa peluangnya diantara 5 orang tadi

a). Tidak terdapat yang lahir tanggal 1 januari

b). Terdapat tidak lebih dari seorang yang lahir pada tanggal 1 Januari

Penyelesaian :

a. Ambil x = banyak orang diantara n = 5 yang lahir pada tanggal 1 Januari. Maka dengan N = 50, D=3, Rumus yang diberikan :

$$p(0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = 0{,}724$$

Peluangnya adalah 0,724 bahwa kelima orang itu tidak lahir padatanggal 1 Januari.

b. Tidak lebih dari seorang yang lahir pada 1 Januari, berarti x = 0 dan x = 1. p(0) sudah dihitung diatas.

$$p(1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{47}{4}}{\binom{50}{5}} = 0{,}253$$

Sehingga, peluang paling banyak seorang diantara 5 orang itu yang lahir pada 1 Januari adalah 0,724 + 0,253 = 0.977

3.5. DISTRIBUSI POISSON

Distribusi poisson disebut juga sebagai peristiwa yang jarang terjadi. Distribusi ini dianggap sebagai pendekatan pada distribusi binomial apabila n (banyaknya percobaan) adalah besar, sedangkan P (Probabilitas sukses) sangat kecil.

Distribusi Poisson digunakan untuk menghitung probabilitas terjadinya kejadian menurut satuan waktu ataupun ruang, misalnya sebagai berikut:

a) banyaknya bakteri dalam satu tetes air atau 1 liter air,

b) banyaknya rumah terbakar dari 10.000 rumah yang diasuransikan selama bulan Januari,

c) banyaknya kecelakaan mobil di muka Istana Merdeka selama minggu pertama bulan Agustus,

d) banyaknya penggunaan telepon per menit,

e) banyaknya kesalahan ketik per halaman laporan tahunan,

f) banyaknya pesanan yang masuk per minggu.

Sehingga secara umum kondisi di atas dapat terjadi pula pada setiap proses. Apabila kondisi di atas ditemui dalam suatu kasus maka kita dapat menggunakan rumus distribusi Poisson.

Variabel acak diskrit X dikatakan mempunyai distribusi Poisson jika fungsi peluangnya berbentuk :

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Keterangan :

P(x)	:	probabilitas terjadinya suatu kejadian
e	:	sebuah bilangan konstan, yaitu 2,7183
λ	:	np = rata-rata distribusi
x	:	0,1,2,3, …….. (x menuju tak hingga)

Contoh 3.5

Peluang seseorang akan mendapat reaksi buruk setelah disuntik besarnya 0,0005. Dari 4000 orang yang disuntik, tentukan peluang yang mendapat reaksi buruk:

a) tidak ada

b) ada 2 orang

c) lebih dari 2 orang, dan
d) tentukan ada berapa or,ing diharapkan yang akan mendapat reaksi buruk.

Penyelesaian:

a) Dengan menggunakan pendekatan distribusi Poisson kepada distribusi binom, maka λ = Np = 4000 X 0,0005 = 2

   Jika X = banyak orang yang mendapat reaksi buruk akibat suntikan itu, maka:

   p(0) = $\dfrac{e^{-2}2^{0}}{0!}$ = 0,1353

b) Dalam hal ini λ = 2, sehingga:

   p(2) = $\dfrac{e^{-2}2^{2}}{2!}$ = 0,2706

   Peluang ada dua orang mendapat reaksi buruk ialah 0,2706

c) Yang menderita reaksi buruk lebih dari 2 orang, ini berarti X= 3,4,5, ….. tetapi p(0) + p(1) + p(2) + …… = 1, maka p(3) + p(4) + …. = 1 - p(0) - p – p(2). Harga-harga p(0) dan p(2) sudah dihitung di atas.

   p(1) = $\dfrac{e^{-2}2^{1}}{1!}$ = 0,2706

   Peluang yang dicari adalah 1 - (0,1353 + 0,2706 + 0,2706) = 0,3235.

d) Ini tiada lain diminta menentukan rata-rata λ.

   Di atas sudah dihitung λ = 2.

Soal Latihan

1. Peluang seorang mahasiswa yang baru masuk universitas akan lulus tepat pada waktunya 0,23. Tentukan berapa peluang dari 20 mahasiswa akan lulus tepat waktunya:
   a. Tidak seorangpun.
   b. Seorang mahasiswa.
   c. Paling sedikit seorang.
   d. Tidak lebih dari seorang.
2. Menurut kriteria tertentu, misalkan di masyarakat terdapat 30% keluarga golongan rendah, 50% golongan menengah dan 20% golongan tinggi. Sebuah sampel acak terdiri 20 keluarga telah diambil. Tentukan peluangnya akan terdapat 6 golongan rendah, 10 golongan menengah, dan 4 golongan tinggi.

BAB 4

EKSPETASI MATEMATIKA

Dalam suatu percobaan tentu ada hasil yang diharapkan. Untuk mendapatkan hasil yang baik dan kesimpulan hasil yang akurat, maka percobaan statistika tersebut dilakukan berulang kali. Hal tersebut dimaksudkan untuk memperoleh suatu hasil yang benar-benar mendekati,sehingga kesimpulan yang dihasilkan valid. Ukuran yang menyatakan harapan dari hasil yang dapat diperoleh dari suatu percobaan statistika dinyatakan secara matematis sebagai ekspektasi matematika.

4.1 Ekspektasi Matematik

Definisi 4.1 Ekspektasi Matematika Suatu Peubah Acak

Jika *X* suatu peubah acak dengan distribusi peluang *f*(*x*), maka nilai harapan *X* atau harapan matematik *X* didefinisikan sebagai:

$$E(X) = \begin{cases} \sum x f(x) & Jika\ X\ diskret \\ \int x.f(x)dx & Jika\ X\ kontinu \end{cases}$$

Contoh 4.1

Tentukan nilai harapan banyaknya wanita dalam panitia yang terdiri dari 3 orang dipih secara acak 4 orang wanita dan 3 orang pria !

Penyelesaian :

Misalkan *X* menyatakan banyaknya wanita yang terpilih, maka rumus peluang *X* adalah:

$$f(x) = \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}, \ x = 0,1,2,3$$

Sehingga, $f(0)=\frac{1}{35}$; $f(1)=\frac{12}{35}$; $f(2)=\frac{18}{35}$; dan $f(3)=\frac{4}{35}$

Jadi, $E(X) = 0.\frac{1}{35}+1.\frac{12}{35}+2-\frac{18}{35}+3.\frac{4}{35}=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$

Ini artinya, bahwa, jika pemilihan tersebut diulang bekali-kali, maka rata-rata wanita terpilih adalah $1\frac{5}{7}$ tiap pemilihan.

Contoh 4.2

Hitunglah nilai harapan peubah acak X yang mempunyai fungsi pada:

$$f(X) = \begin{cases} 2X, & untuk\, 0 < X < 1 \\ 0, & untuk\ X\ lainnya \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x, 2x dx = \frac{2}{3}x^3 \Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Soal Latihan!!

1. Suatu pengiriman 7 TV mengandung 2 yang cacat. Suatu hotel membeli secara acak 3 dari padanya. Bila X menyatakan banyaknya yang cacat yang dibeli oleh hotel, carilah nilai harapan X.
2. Tukang cuci mobil dibayar berdasarkan banyaknya mobil yang dicuci. Misalkan bahwa penerimaannya sehari, dalam bentuk ribuan rupiah, 7, 9, 11, 13, 15, atau 17 dengan peluang masing-masing $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, dan $\frac{1}{6}$. Carilah harapan penghasilan mereka sehari.
3. Dengan membeli sejenis saham tertentu seseorang dapat memeproleh keuntungan setahun sebesar Rp 4.000 dengan peluang 0,3 atau rugi Rp 1.000 dengan peluang 0,7. Berapakah harapan penghasilannya!
4. Bila keuntungan penjual mobil baru satu juta rupiah (dalam satuan) dapat dipandang sebagai peubah acak X yang mempunyai fungsi padat

   $$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & untukxlainnya \end{cases}$$

   Hitunglah keuntungan rata-rata per mobil.
5. Diketahui distribusi peluang peubah acak *X* adalah sebagai

   $f(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$ untuk *x* = 0, 1, 2, 3,

   hitunglah *E*(*X*)!
6. Fungsi padat pengukuran yang telah disandi suatu jenis barang tertentu adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(1+x^2)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & untukxlainnya \end{cases}$$

Hitunglah E(X).

7. Berapa bagian dari orang yang dapat diharapkan akan menjawab tawaran lewat pos bila proporsi X mempunyai fungsi padat:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{2(\mathrm{x}+2)}{5}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{untuk x lainnya} \end{cases}$$

8. Fungsi padat peubah acak kontinu X, jumlah jam dalam satuan 100 jam, mesin pengisap debu digunakan setahun oleh sebuah keluarga berbentuk

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \mathrm{x}, & 0 < x < 1 \\ 2 - \mathrm{x}, & 1 \leq \mathrm{x} < 2 \\ 0, & \text{untuk x lainnya} \end{cases}$$

Carilah rata-rata jumlah jam setahun keluarga tadi menggunakan mesin tersebut.

Definisi 4.2 Ekspektasi Matematik Suatu Fungsi

Jika *X* suatu peubah acak dengan distribusi peluang *f*(*x*), maka nilai harapan matematik fungsi *g*(*x*) dinyatakan sebagai:

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x) f(x) & \textit{Jika x diskret} \\ \int\limits_{\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx,. & \textit{Jika x kontinu} \end{cases},$$

Contoh4.3

Misalnya *X* suatu peubah acak dengan distribusi peluang sebagai berikut:

X	0	1	2	3
f(*x*)	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

Hitunglah nilai harapan peubah acak *Y* = *X* + 1

Penyelesaian:

Karena *X* peubah acak diskret, maka

$$E[g(x)] = \sum_{x} g(x) f(x) = \sum_{x=0}^{3} (x+1) f(x)$$

$$= (0+1)\frac{1}{10} + (1+1)\frac{2}{5} + (2+1)\frac{3}{10} + (3+1)\frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{8}{10} + \frac{9}{10} + \frac{8}{10} = \frac{29}{10} 2{,}9$$

Contoh4.4

Diketahui *X* suatu peubah acak dengan fungsi padat peluang

f(*X*) = $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & untuk - 1 < x < 2 \\ 0, & untuk\, x\, lainnya \end{cases}$

Hitunglah nilai harapan *g*(*X*)=2*X*-1!

Penyelesaian:

$$E(2x-1) = \int_1^2 (2x-1)\frac{1}{3}\, x^2\, dx = \frac{1}{3}\int \left(2x^3 - x^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}(16-1) - \frac{1}{3}(8+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{15}{2} - 3\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Soal Latihan

1. Misalkan X menyatakan hasil yang muncul bila suatu dadu yang setangkup dilantungkan. Hitunglah nilai harapan g(x) = $3X^2 + 4$.
2. Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang berikut:

X	-3	6	9
f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

   Hitunglah nilai harapan peubah acak g(X) = $(2X + 1)^2$

3. Diketahui distribusi peluang peubah acak diskrit X adalah

   $$f(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

   Hitunglah nilai harapan peubah acak g(x) = X^2.

4. Suatu peubah acak kontinu X mempunyai fungsi padat

   $$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x > 0 \\ 0, & untukxlainnya \end{cases}$$

   Hitunglah nilai harapan g(X) = $e^{2x/3}$

5. Bilakeuntungan penjual mobil baru satu juta rupiah (dalam satuan) dapat dipandang sebagai peubah acak X yang mempunyai fungsi padat

   $$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & untukxlainnya \end{cases}$$

   Berapakah nilai harapan g(X) = X^2

Definisi 4.3 Ekspektasi Matematika dari Fungsi Peluang Gabungan

Jika *X* dan *Y* peubah acak dengan distribusi peluang gabungan *f*(*x*), maka nilai harapan matematika fungsi *g*(*X*,*Y*) ditentukan oleh:

$$E\left[g(X,Y)\right]=\begin{cases} =\sum_{x}\sum_{y} g(x,y)\, f(x,y), & Jika\ \ X\ dan Y\ diskret \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f(x,y)dxdy,. & Jika\ X\ dan Y\ kontinu \end{cases}$$

Contoh 4.5

Distribusi peluang gabungan peubah acak *X* dan *Y* sebagai berikut

Y \ X	0	1	2
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$

Hitungalah nilai harapan *g*(*X*, *T*) = *XY* .

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf(x,y) \\ &= (0)(0)\,f(0,0)+(0)\,f(0,1)+(0)(2)\,f(0,2)+(1)(0)\,f(1,0) \\ &\quad +(1)(1)\,f(1,1)+(1)\,f(1)(1,1)+(1)(2)\,f(2,1)+(2)(2)\,f(2,2) \\ &= 1.\frac{1}{9}+2.\frac{1}{4}+4.\frac{1}{18}=\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{9}=\frac{2+9+4}{18}=\frac{15}{18} \end{aligned}$$

Contoh4.6

Hitunglah $\left(\frac{Y}{X}\right)$ untuk fungsi padat :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(1+3y^2)}{4} & 0 < x < 2; 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ dan } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = \int_0^1 \int_2^1 \frac{y(1+3y^2)}{4} dxdy = \int_0^1 \frac{y+3y^3}{2} dy = \frac{5}{8}$$

Sifat 4.1 Ekspektasi Matematika

a. Jika *a* dan *b* konstanta, maka *E*(*aX*+*b*)-*aE*(*X*)+*b*
b. Jika *a* = 0, maka *E*(*b*)=*b*
c. Jika *b* = 0, maka *E* (*aX*) = *aE*(*X*)
d. *E*[*g*(*X*)$\pm$*h*(*X*)] = *E*[*g*(*X*)]$\pm$*E*[*h*(*X*)]
e. Jika *g*(*X*,*Y*) = *X* dan *h*(*X*,*Y*)=*Y* maka *E*(*X*$\pm$*Y*)= *E*(*X*)$\pm$*E*(*Y*)
f. Jika *X* dan *Y* dua peubah acak yang bebas, maka *E*(*XY*) = *E*(*X*)*E*(*Y*).

Bukti: $E(aX+b) = \sum_x (ax+b) f(x) = a\sum_x xf(x) + b\sum_x f(x) = aE(X) + b$ (sifat 2.1a terbukti)

Bukti sifat berikutnya sebagai latihan mahasiswa.

4.2 Moment

Definisi 4.4 Moment Disekitar Pusat

Jika *X* peubah acak, maka moment disekitar pusat *X* dibdefinisikan sebagai $\mu_k^{'} = E(x^k)$.

Jika k=0 maka dieproleh $\mu_0' = \sum_x x^0 f(x) = \sum_x f(x) = 1$. Untuk *X* diskret, dan $\mu_0' = \int_{-\infty}^{\infty} x^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ untuk *X* kontinu. Sekarang, jika *k*=1, maka

$\mu_1' = \sum_x xf(x) = E(X)$ dan $\mu_1' = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = E(x)$ yaitu nilai harapan pubah acak *X* itu sendiri. Dengan demikian momen pertama di sekitar titik asal suatu peubah acak *X* ini menyatakan rataan peubah acak tersebut. Maka dari itu rataan ini ditulis dengan μ_x atau lebih sederhana μ saja. Jadi, $\mu = E(x)$.

Definisi 4.5 Moment Disekitar Rataan

Jika X peubah acak, maka moment disekitar rataan X dibdefinisikan sebagai $\mu_k = E(x-\mu)^2$. Untuk k=2 atau momen kedua di sekitar rataan, yaitu μ_2, akan memberikan gambaran pengukuran sekitar rataan. Oleh sebab itu untuk selanjutnya μ_2 ini dinamakan variansi peubah acak X dan dinyatakan dengan σ_x^2 atau lebih singkat σ^2 saja. Jadi $\sigma^2 = \mu_2 = E[(X-\mu)^2]$ Akar positif dari variansi ini akan memberikan suatu ukuran yang disebut dengan simpangan baku atau standar deviasi.

Teorema 4.1 Varians

Jika peubah acak bebas, maka $\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$

Bukti:

$$\sigma^2 = E(x-\mu)^2 = E(x^2 - 2x\mu + \mu^2) = E(x^2) - 2\mu E(x) + E(\mu^2) = E(x^2) - 2\mu\mu + \mu^2$$
$$= E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

Contoh 4.7

Tentukan variansi X, jika X menyatakan banyaknya buah mangga yang harus diambil oleh Dilla dari dalam tas yang berisi 4 mangga dan 3 jeruk, jika dia mengambil 3 buah sekaligus !

Penyelesaian:

Distribusi peluangnya adalah :

X	0	1	2	3

$$E[X] = \sum_x x f(x) = 0.\frac{1}{35} + 1.\frac{12}{35} + 2.\frac{18}{35} + 3.\frac{4}{35} = \frac{12}{7}$$
$$E[X^2] = \sum_x x^2 f(x) = 0.\frac{1}{35} + 1.\frac{12}{35} + 2.\frac{18}{35} + 3.\frac{4}{35} = \frac{24}{7}$$

Jadi $\sigma^2 = \frac{24}{7} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$

Contoh 4.8

Diketahui fungsi padat peluang peubah acak X dinyatakan sebagai :

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x < 2 \\ 0 & untuk\ x\ laiinya \end{cases}$$

hitunglah Rataan dan Variansi

Penyelesaian:

$$E[X] = 2\int_1^2 X(X-1)dx = 2\int_1^2 (x^2 - x)dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 2\left(\frac{1}{3}(8 - 10 - \frac{1}{2}(4-1)\right)$$
$$= 2\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{3}$$
$$E\left[X^2\right] = 2\int x^2(x-1)dx = \frac{17}{6.}$$

Sehingga diperoleh rataan $\mu = E(X) = \frac{5}{3}$ dan varians $\sigma^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$

Definisi 4.4 Kovarians

Jika *X* dan *Y* dua peubah acak bebas dengan rataan μ_x dan μ_y, maka kovarians peubah acak *X* dan *Y* didefinisikan sebagai $\sigma_{XY}^2 = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$

Teorema 4.2 Kovarians

Jika *X* dan *Y* dua peubah acak bebas dengan rataan μ_x dan μ_y, maka kovarians peubah acak *X* dan *Y* dapat ditentukan dengan $\sigma_{xy}^2 = E(XY) - E(X)E(Y)$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xy}^2 &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E(XY - X\mu_y - Y\mu_x + \mu_x\mu_y) \\
&= E(XY) - \mu_y E(X) - \mu_x E(Y) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - (X)E(Y)
\end{aligned}
$$

Contoh 4.9

Dimas mengambil 2 buah pensil secara acak dari sebuah kotak yang berisi tiga pensil warna biru, dua warna merah dan tiga warna kuning. Jika *X* menyatakan pensil warna biru dan *Y* warna yang diambil, hitunglah kovariansi dua peubah tersebut!

Penyelesaian:

Distribusi pelang gabungannya sebagai berikut:

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	
2	$\frac{1}{28}$		

Sehingga $E[XY] = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf(x,y) = \frac{3}{14}$ (lihat nilai harapan peubah acak gabungan X dan Y)

$\mu_x = E[X] = \sum_{x-0}^{2}\sum_{x-0}^{2} xf(x,y) = \sum_{x-0}^{2} xg(x) = (0)(\frac{10}{28}) + (1)(\frac{15}{28}) + (2)(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}$ Jadi

$\mu_y = E[Y] = \sum_{x-0}^{2}\sum_{y-0}^{2} yf(x,y) = \sum_{x-0}^{2} yh(y) = (0)(\frac{15}{28}) + (1)(\frac{12}{28}) + (2)(\frac{1}{28}) = \frac{1}{2}$

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_x\mu_y = \frac{3}{14} - (\frac{3}{4})(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{56}$$

Contoh 4.10

Tentukan kovariansi peubah acak *X* dan *Y* yang fungsi padat peluang gabungannya dinyatakan sebagai

$$f(x,y) = \begin{cases} 4 & 0 < x < y; 0 < y < 1 \\ 0 & x\ lainnya \end{cases}$$

$\mu_x = E(X) = \int_0^1\int_0^y 4ydxdy = \frac{1}{4}$ dan $E(XY) = \int_0^1\int_0^y 4xydxdy = \frac{1}{2}$ sehingga

$$\sigma_{xy} = E(Xy)\mu_x\mu_y = \frac{1}{2}(\frac{2}{3})(\frac{4}{3}) = \frac{10}{9}$$

Sifat 4.1 Varians

a. Jika X pebuah acak dengan distribusi leluang f(x), maka variansi g(X) adalah $\sigma_x^2(x) = E\left[\{g(X) - \mu_g(x)\}^2\right]$

b. Jika X suatu peubah acak dan b suatu tetapan, maka $\sigma^2{}_{x+b} = \sigma_x^2 = \sigma^2$

c. Jika X suatu peubah acak dan a suatu konstanta, maka $\sigma_{ax}^2 = a^2\sigma^2{}_x = a^2\sigma^2$

d. Jika X dan Y peubah acak dengan distribusi peluang gabungan f(x,y), maka $\sigma^2{}_{aX+bY} = a^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{xy}$

e. Jika X dan Y penuh acak yang bebas, makan $\sigma^2{}_{aX-bY} = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$

Teorema 4.2 Teori Chebyshev

Peluang bahwa setiap peubah acak X mendapat nilai dalam k simpngan baku dari nilai rataan adalah paling sedikit $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$yaitu

$$p(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Bukti :

Menurut definisi variansi,

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma}(-\mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma}(x-\mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma^2}(x-\mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma^2}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

karena integral $\int_{\mu-k\sigma}^{\mu-k\sigma}(x-\mu)^2 f(x)dx$ tak negatif. Kemudian $|X-\mu| \geq K\sigma$ dengan $x \geq \mu + k\sigma$ atau $x \leq \mu - k\sigma$ dengan $(X-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2$ dalam kedua integral lainnya, maka $\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu k\sigma} k^2\sigma^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} \sigma^2 f(x)dx$. Jika ruas kanan dibagi dengan $k^2\sigma^2$, maka diperoleh $\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x) + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x)dx \leq \frac{1}{k^2}$

sehingga

$$p(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu-k\sigma} f(x)dx \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

dengan demikian terbuktilah teorema Chebyshev.

Contoh 4.11

Suatu peubah acak *X* mempunyai rataan $\mu = 8,$ variansi $\sigma^2 = 9,$ sedangkan distribusinya tidak diketahui. Hitunglah a. *P*(-4<*X*<20), dan b. *P*($|X - 8| \geq 6$).

Penyelesaian :

a, Telah diketahui, bahwa $\mu = 8,$ variansi $\sigma^2 = 9,$ sehingga $\sigma = \gamma 9 = 9.$ yang harus dicari adalah nilai *k*. Nilai *k* ini dicari dengan melihat salah satu ujung interval, yaitu -4 atau 20. Berdasarkan teorema *Chebyshev* diketahui, bahwa

$p(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} f(x)dx > 1 - \frac{1}{k^2},$ sehingga dengan menyelesaikan persamaan ini diperoleh nilai *k*=4. Jadi,

$$P(-4 < X < 20) = P\left[8 - (4)(3) < X < 8 + (4)(3)\right] \geq 1 - \frac{1}{1\sigma} \Leftrightarrow P(-4 < X < 20) \geq \frac{15}{1\sigma}$$

Kerena diketahui , bahwa simpangan baku = 3, maka 3k = 6 $\Leftrightarrow$ k = 2, sehingga : $P(|X - 8| \geq 6) = 1 - P(8 - (2)(3) < X < 8 + (2)(3) \leq 1/4$

b. $P(|X - 8| \geq 6) = 1 - P(|X - 8| < 6) = -P(-6 < X - 8 < 6) = 1 - P(8 - 6 < X < 8 + 6)$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Hitunglah nilai harapan peubah acak X yang mempunyai fungsi padat peluang

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

2. Jika X menyatakan hasil yang muncul jika suatu dadu yang sepasang dilantunkan, hitunglah nilai $E(Y)$, jika $Y=2X^2-5$.
3. Misalkan X dan Y adalah peubah acak dengan fungsi padat gabungan :

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai harapan $Z = \sqrt{X^2 + y^2}$!

4. Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang berikut :

X	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Hitunglah *a*) $E(X)$; *b*. $E(x^2)$; *c*. $E[(2X+1)^2]$; dan $E[\{X-E(X)\}^2]$

5. Olid dan Dilla bersama-sama mengambil empat buah-buahan secara acak dari dalam tas yang berisi 3 jeruk, 2 mangga, dan 3 pisang. Jika X menyatakan banyaknya jeruk dan Y banyaknya mangga dalam sampel tersebut, hitunglah kovariansi peubah acak X dan Y.
6. hitunglah kovariansi acak X dan Y yang mempunyai fugsi padat peluang gabungan ; $f(x,y)= x+y$, $0<X<y$; $0<y<1$ dan $f(x,y) = 0$ untuk nilai x dan y lainnya.

7. Misalkan *X* menyatakan bilangan yang muncul jika sebuah dadu hiaju dilantunkan dan *Y* bilangan yang muncul jika sebuah dadu merah dilantukan hitunglah variansi peubah acak *a*, 2*X*-*Y*; *b*. *X*+3*Y*-5!
8. Jika *X* dan *Y* dua peubah acak bebas dengan variansi $\sigma_X^2 = 5$ dan $\sigma_y^2 = 5$, hitunglah variansi peubah acak *Z* = 12*X*+4*Y*-3!
9. Diketahui soal no. 9, hitunglah variansinya jika peubah acak *X* dan *Y* tak bebas dan $\sigma_{XY} = 1$.

BAB 5
FUNGSI PEUBAH ACAK

Pengkajian yang lebih mendalam tentang penerapan distribusi, baik yang diskret maupun yang kontinu akan dipelajari pada bab ini, termasuk diantaranya keandalan, pengendalian mutu, dan penyampelan penerimaan (*acceptance sampling*)

5.1 Transformasi Peubah Acak Diskrit Tunggal

Teorema 5.1

Misalkan X suatu peubah acak diskret dengan distribusi peluang $f(x)$. Misalkan $Y = u(X)$ suatu transformasi satu-satu antara nilai X dan Y, sehingga persamaan $y = u(X)$ mempunyai jawaban tunggal untuk x dinyatakan dalam Y_i misalnya $x = w(y)$, maka distribusi peluang Y adalah $g(y) = f[w(y)]$.

Contoh 5.1

Diketahui X adalah peubah acak geometrik dengan peluang:

$$f(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}, \text{ dengan } x = 1, 2, 3, \ldots$$

Tentukan distribusi peluang peubah acak $Y = X^2$

Penyelesaian:

Dari soal diketahui bahwa nilai x semuanya positif, transformasi antara nilai x dan y tersebut adalah satu, $y = x^2$ maka $x = \sqrt{y}$

Jadi $g(y) = f\left(\sqrt{y}\right) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{y}-1} & untuk\ y = 1,4,9,\cdots \\ 0 & untuk\ x\ lainnya \end{cases}$

5.2 Transformasi Peubah Acak Diskret Gabungan

Teorema 5.2

Misalkan X_1 dan X_2 peubah acak diskret dengan distribusi peluang gabungan $f(x_1,x_2)$. Misalkan lagi $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ dan $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ merupakan suatu transformasi satu-satu antara himpunan titik (X_1, X_2) dan (y_1, y_2), sehingga persamaan $y_1 = u_1 (x_1, x_2)$ dan $y_2 = u_2 (x_1, x_2)$ mempunyai jawaban tunggal untuk x_1 dan x_2 dinyatakan dalam y_1 dan y_2. Misalnya $x_1 = w_1(y_1,y_2)$ dan $x_2 = w_2(y_1,y_2)$, maka distribusi peluang gabungan y_1 dan y_2 adalah $g(y_1,y_2) = f[w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2)]$.

Transformasi ini sangat berguna untuk menentukan distribusi peubah acak $y_1 = u_1(X_1, X_2)$ peubah acak diskret dengan distribusi peluang $f(x_1,x_2)$. Untuk menentukan distribusi peluang gabungan $g(y_1,y_2)$ cukup dibentuk fungsi kedua misalnya $Y_2 = u_2(X_2,X_2)$ dan (y_1,y_2) dapat dipertahankan. Distribusi Y_1 ini hanyalah distribusi marginal dari $g(y_1,y_2)$ yang dapat diperoleh dengan menjumlahkannya terhadap nilai y_2. Jika distribusi Y_1 dinyatakan dengan $h(y_1)$, maka distribusinya dapat dinyatakan dengan $h(y_1) = \sum_{y2} g(y_1 - y_2)$

Contoh 5.2:

Diketahui $X1$ dan $X2$ dua peubah acak bebas yang berdistribusi Poisson, masing-masing berparameter μ_1 dan μ_2. Jika ditentukan distribusi peubah acak $y_1 = X_1 + X_2$, maka buktikan bahwa peubah acak tersebut berdistribusi Poisson !

Penyelesaian :

Karena X_1 dan X_2 dua peubah acak bebas yang terdistribusi Poissen, maka

$f(x_1,x_2) = f(x_1), f(x_2) = \dfrac{e^{\mu_1}\mu_1^{\;x_1}}{x_1!} . \dfrac{e^{-\mu_2}\mu_2^{\;x_2}}{x_2!} = \dfrac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}\mu_1^{\;x_1}\mu_2^{\;x_2}}{x_1!x_2!}$,

dengan $x_1 = 0, 1, 2,...$ dan $x_2 = 0, 1,2,...$

Sekarang dibentuk peubah acak kedua yaitu $y_2 = x_2$. Fungsi balikannya diberikan oleh $x_1 = y_1 - y_2$ dan $x_2 = y_2$. dengan menggunakan transformasi diperoleh distribusi peluang gabungan y_1 dan y_2 yaitu: $g(y_1, y_2) = \dfrac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}\mu_1^{\;y_1-y_2}\mu_2^{\;y_2}}{(y_1-y_2)!y_2!}$

Dengan $y_1 = 0,1,2,\cdots$ dan $y_2 = 0, 1, 2,..., y_1$

Karena $x_1 = 0,1,2,\ldots$ maka transformasi $x_1 = y_1 - y_2$ mengakibatkan x_2 dan juga y_2 harus selalu kurang dari atau sama dengan y_1. Jadi distribusi peluang marginal y_1 adalah :

$$h(y_1) = \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = e^{-(\mu_1+\mu_2)} \sum_{y_2=0}^{n} \frac{\mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!y_2!}$$

$$= e^{-(\mu_1+\mu_2)} \sum_{y_2=0}^{n} \frac{y_1!}{(y_1-y_2)!y_2!} \frac{\mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}}{y_1!}$$

$$= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{n} \binom{y_1}{y_2} \mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}$$

Karena $\sum_{y_2=0}^{y_1}\binom{y_1}{y_2}\mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}=(\mu_1+\mu_2)^{y_1}$, maka diperoleh

$h(y_1)=\dfrac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}(\mu_2+\mu_2)^{y_1}}{y_1}$, dengan y_1 = 0, 1, 2,...

Dari rumus ini terbukti bahwa jumlah dua peubah acak bebas yang berdistribusi Poisson dengan parameter $\mu_1+\mu_2$.

5.3 Transformasi Peubah Acak Tunggal Kontinu

Teorema 5.3

Misalkan *X* satu-satu antara nilai *X* dan *Y*, sehingga persamaan *y* = *u*(*x*) mempunyai jawaban tunggal untuk *x* dan *y*, misalnya *x* = *w*(*y*), maka distribusi peluang *Y* dinyatakan oleh *g*(*y*) = *f*[*w*(*y*)]*J*, dengan *J* = *w* (*y*) dan dinamakan Jacobi transformasi

Contoh5.3

Diketahui *X* peubah acak kontinu dengan fungsi padat peluang

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{12} & untuk\, 1<x<5\\ 0 & untuk\;\; x\; lainnya\end{cases}$$

Tentukan distribusi peluang peubah acak *Y* = 2*X* – 3

Penyelesaian:

Invers dari y = 2x-3 adalah *x* = $\dfrac{(y+3)}{2}$, sehingga diperoleh $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2}$, sehingga diperoleh. Untuk $x=1$, maka $y=2-3=-1$, sedangkan untuk *x* = 5, maka $y=2(5)-3=7$, dengan menggunakan transformasi di atas, diperoleh :

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{\frac{y+3}{2}}{12}\dfrac{1}{2}=\dfrac{y+3}{48} & Untuk\ -1<y<7\\ 0 & Untuk\ y\ lainnya\end{cases}$$

5.4 Transformasi Peubah acak Kontinu Gabungan

Teorema 5.4

Misalkan X_1 dan X_2 peubah acak kontinu dengan distribusi peluang gabungan $f(x_1,x_2)$. Misalkan lagi $y_1 = u_1(X_1,X_2)$ dan $Y_2 = U_2(X_1,X_2)$ merupakan suatu transformasi satu-satu antara himpunan titik (x_1,x_2) dinyatakan dalam y_1 dan y_2. Misalnya $x_1 = w_1(y_1,y_2)$ dan $x_2 = w_2(y_1,y_2)$, maka distribusi peluang gabungan y_1 dan y_2 adalah $g(y_1,y_2) = f[w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2)]J$. Dengan Jacobi adalah determinan 2x2, yaitu :

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}$$

$\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}$ adalah turun $x_1 = w_1(y_1,y_2)$ terhadap y_1 dengan y_2 tetap (turunan parsial x_1 terhadap y_1).Turunan parsial lainnya didefinisikan dengan cara yang sama.

Contoh 5.4

Misalkan X_1 dan X_2 dua peubah acak kontinu dengan fungsi padat peluang gabungan

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}4x_1x_2 & 0<x_1<1;0<x_2<1\\ 0 & x\ lainnya\end{cases}$$

tentukan rumus fungsi untuk $y_1 =$ $y_1 = x_1^2$ dan $y_2 = x_1x_2$

Penyelesaian :

Invers dari y_1 = x_1^2 dan y_2 = x_1x_2 adalah $x_1 = \sqrt{y_1}$ dan $x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1}}$

sehingga diperoleh

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ -\frac{y_2}{2y_1^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{y_1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_1}$$

Transformasi ini satu-satu memetakkan titik {(x_1,x_2)$\big|0 < x_1 < 1$; $0<x_2<2$} ke himpunan {(y_1,y_2) $\big|\ 0 < y_1 < 1; 0 < y_2 < 1$}.

Dengan menggunakan transformasi di atas, diperoleh distribusi Gabungan yang dinyatakan sebagai berikut:

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} 4\sqrt{y_1}\,\frac{y_2}{\sqrt{y_1}}\,\frac{1}{2y_1} = \frac{2y_2}{y_1} & 0 < y_1 < 1; 0 < y_2 < 1 \\ 0 & x\ lainnya \end{cases}$$

5.5 Kombinasi Linear Peubah Acak

Teorema 5.5

Jika X_1, X_2, ..., X_3 peubah acak bebas yang berdistribusi normal, masing-masing dengan rataan $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ dan variansi $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2$, maka peubah acak $Y=a_1X_1+a_2X_2+...+a_nX_n$ berdistribusi normal dengan rataan $\mu_Y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n$ dan variansi $\sigma_{1\,Y}^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\mu_2^2 + \cdots + a_n^n\mu_n^n$

Teorem 5.6

Jika X_1, X_2, …, X_n. Peubah acak bebas yang berdistribusi normal, maka $\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)^2$, $\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)^2$, …, $\left(\frac{x_n - \mu}{\sigma}\right)^2$ masing-masing berdistribusi Chi-

Kuadrat dengan derajat kebebasan V_1, V_2, ..., V_n. Selanjutnya peubah acak $Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2$ akan berdistribusi Chi-Kuadrat dengan derajat kebebasan $v = n$.

5.6 Populasi

Definisi 5.1

Populasi adalah totalistas semua nilai yang mungkin, hasil menghitung ataupun pengukuran, kuantitatif mengenai karakteristik tertentu dari semua anggota kumpulan yang lengkap dan jelas yang ingin dipelajari sifat-sifatnya.

Banyaknya pengamatan dalam populasi dinamakan ukuran populasi. Jika terdapat 1.500 mahasiswa Universitas PGRI Madiun yang ingin diselidiki motivasinya, maka dikatakan ukuran populasinya 1.500.

Tiap pengamatan dalam populasi merupakan suatu nilai dari suatu peubah acak X dengan suatu distribusi peluang $f(x)$. Sebagai contoh, misalnya dalam memeriksa apakah suatu barang yang dihasilkan suatu pabrik cacat atau tidak, tiap pengamatan dalam populasi merupakan nilai peubah acak binomial X dengan nilai 0 atau 1 dengan distribusi peluang $b(x;1,p) = p^x q^{1-x}$, $x = 0,1$ dengan nilai 0 menyatakan barang yang tidak cacat, sedangkan 1 menyatakan barang yang cacat, tidak berubah dari suatu usaha ke usaha lainnya. Untuk selanjutnya, jika disebut “populasi binomial”, “populasi normal” atau umumnya “populasi $f(x)$”, maka yang dimaksud adalah salah satu populasi yang pengamatannya merupakan nilai peubah acak yang berdistribusi binomial, normal, atau berdistribusi peluang $f(x)$. Jadi rataan dan variansi suatu peubah acak yang berdistribusi peluang disebut juga rataan dan variansi populasi yang bersngkutan.

5.7 Sampel

Definisi 5.2

Sampel adalah suatu himpunan bagian dari populasi

Dalam bidang infresnsi statistika (statistika yang mempelajari pengalaman pengumpulan, penyajian, pengolahan data disertai kesimpulan dengan generalisasi), seorang statistikawan ingin menarik kesimpulan mengenai suatu populasi mengenai suatu hal tidak mungkin atau tidak praktis mengamati himpunan semua pengamatan yang membentuk populasi itu. Karena itu, hanya menggunakan sebagai pengamatan yang membentuk populasi itu. Himpunan bagian dari populasi yang betul-betul mewakili semua karakteristik yang ada pada populasi inilah yang disebut sampel.

Sering kali kita kita tergoda dalam mengambil sampel dengan memilih anggota populasi yang paling sesuai dengan keinginan kita. Cara kerja seperti ini dapat menghasilkan inferensi yang keliru tentang populasi.

Setiap prosedur sampling yang menghasilkan inferensi yang konssiten menaksir lebih atau konsisten penaksir kurang terhadap suatu parameter populasi dinamakan bias. Untuk mencegah terjadinya bias dalam prosedur sampling, maka sebaiknya menggunakan sampel acak dalam artian bahwa pengamatan dilakukan secara bebas satu sama lain dan acak.

5.8 Sampel acak

Definisi 5.3

Misalkan $x_1, x_2, ..., x_n$ merupakan n peubah acak bebas yang masing-masing berdistribusi peluang $f(x)$. $X_1, X_2, ..., X_n$ didefinikan sebagai sampel acak ukuran n dari populasi $f(x)$ dan distribusi peluang gabungannya ditulis sebagai $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$

Contoh 5.6

Jika dari suatu pabrik dipilih secara acak n = 8 bola lampu yang diprodksi dengan ketentuan (keadaan) yang sama, dan kemudian umurnya dicatat, pengukuran pertama x_1 menyatakan nilai x_1, pengukuran kedua x_2 nilai x_2, dan seterusnya, maka x_1, $x_2, \ldots, x_3$ merupakan nilai sampel acak $x_1, x_2, ..., x_3$. Jika dianggap populasi umur bola lampu distribusi normal, maka nilai yang mungkin untuktiap x_1, i = 1, 2,…,8, maka tetap sama dengan populasi semula, dan karenanya x_1 akan mempunyai distribusi normal yang tetap sema dengan populasi semula, dan karenaya x_1 akan mempunyai distribusi normal yang tepat sama dengan X.

5.9 Statistik

Tujuan utama memilih sampel adalah yang mendapatkan keterangan mengenai parameter populasi yang tidak diktehaui. Misalkan, kita ingin menarik kesimpulan mengeani proporsi penduduk Indonesia yang menyenangi suatu acara TV dari stasiun tertentu. Akan mustahil, jika kita menanyai semua orang Indonesia dan kemudian menghitung parameter p yang menggambarkan proporsi sebenarnya. Sebagai gantinya, diambil sampel acak yang banyak dan kemudian dihitung proporsi $\hat{p}$ pada sampel yang menyenagani suatu acara TV. Nilai $\hat{p}$ ini kemudian dipakai untuk menarik kesimpulan mengeani prosrsi p yang sesungguhnya. Sekarang $\hat{p}$ merupakan fungsi dari nilai pengamatan dalam sampel acak karena banyak sampel acak yang dapat diambail dari populasi yang sama, maka tentunya $\hat{p}$ akan berlainan sedikit dari suatu peubah acak yang kita nyatakan dengan $\hat{p}$. Peubah acak seperti ini dinamakan statistik. Jadi, statistik adalah setiap fungsi dari peubah acak yang membentuk suatu sampel acak.

5.10 Rataan Sampel

Definisi 5.4

Jika x_1, x_2, ...,x_n menyatakan sampel acak ukuran n, maka rataan sampel dinyatakan oleh statistik $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Contoh 5.7

Pak Amir memeriksa sampel acak 7 nilai mahasiswa untuk mengetahui prestainya. Dia mencatat 56, 68, 78, 87, 45, 96, 55 hitunglah rataan sampel tersebut!

Penyelesaian:

n = 4, maka

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=i}^{7} x_i}{7} = \frac{56+68+78+87+45+96+55}{7} = \frac{485}{7} = 69{,}286$$

5.11 Median Sampel

Definisi 5.5

Jika x_1, x_2,...,x_n menyatakan salpel acak ukuran n, diurutkan membesar menurut besarnya, maka median sampel ditentukan dengan statistik : $\overline{X} = \begin{cases} X_{\frac{n+1}{2}} & jika\ n\ ganjil \\ \dfrac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n+1}{2}}}{2} & Jika\ n\ genap \end{cases}$

Contoh 5.8

banyaknya kehadiran mahasiswa pada mata kuliah Statistik Matematika pada semester genap yang dipilih secara acak adalah 8, 3, 9, 5, 6, 8, dan 5. hitunglah Median data sampel tersbut!

Penyelesaian :

Untuk mengihitungnya, maka data tersebut harus diurut dari kecil ke besar sebagai berikut 3 5 5 6 8 8 9, karena n = 7, maka median adalah $X_{(7+1)/2}$ = 6 (X_4, artinya data pada urutan ke-4).

5.12 Modus Sampel

Definisi 5.6

Jika x_1, x_2,...,x_n, tidak perlu semuanya berbeda, menyatakan suatu sampel acak ukuran n, maka modus M adalah nilai sampel yang paling sering muncul ataupun yang frekuensinya paling tinggi. Modus mungkin tidak ada, dan kalaupun ada mungkin tidak tunggal.

Contoh 5.9:

Jika sumbangan suatu sampel acak penduduk Kelurahan Pancor pada suatu musibah tanah longsor adalah 9, 10, 5, 9, 9, 7, 8, 6, 10 dan 11 ribu rupiah, maka modusnya adalah M = Rp. 9.000,- karena nilai yang paling sering muncul adalah 9 ribu rupiah.

Contoh 5.10

Banyaknya judul buku yang dibaca bulan lalu oleh suatu sampel acak 12 mahasiswa Pendidikan Matematika Universitas PGRI Madiun di perpustakaan Program Studi dalam sehari tercatat sebagai berikut 2, 0, 1, 2, 4, 2, 5, 4, 0, 1, dan 4. Dalam kasus ini terdapat dua modus, yaitu 2 dan 4 , sebab 2 dan 4 muncul paling sering. Distribusi seperti ini disebut dwimodus.

Contoh 5.11

Kadar nikotin suatu sampel acak dari 6 batang rokok merek tertentu adalah 2; 2,7; 2,5; 2,9; 3,1; dan 1,9. distribusi seperti ini tidak mempunyai modus, sebab tiap pengukuran hanya muncul sekali (sama frekuensi kemunculannya).

5.13 Rentangan

Definisi 5.7

Rentangan dari sampel x_1, x_2, ...,x_n, didefinisikan sebagai statistik $X_{terbesar}$ - $X_{terkecil}$ dari terkecil suatu pengamatan

Contoh 5.12:

IQ suatu sampel acak dari 5 penghuni suatu asrama mahasiswa adalah 108, 112, 127, 118, dan 113. tentukan rentangannya !

Penyelesaian:

$x_{terbesar}$ = 127 dan $x_{terkecil}$ = 108, maka rentangannya = 127-108 = 19

5.14 Keragaman (variansi) dalam sampel

Definisi 5.8

Jika x_1, x_2,...,x_n, sampel acak ukuran *n*, maka variansi (keragaman) sampel didefinisikan sebagai statistik

$$S^2 = \frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

Contoh 5.13

Data sampel 4 orang mahasiswa yang diambil nilainya secara acak pada ujian statistik matematika adalah sebagai berikut: 67, 78, 56, dan 86, hitunglah variansi sampelnya!

Penyelesaian:

$$\overline{X} = \frac{67+78+56+86}{4} = \frac{287}{4} = 71{,}75$$

$$\sum_{i-1}^{4}(x_i - \overline{x})^2 = (67-71{,}75)^2 + (78-71{,}75)^2 + (56{,}75)^2 + (86-71{,}75)^2$$

$$= 25{,}5625 + 39{,}0625 + 248{,}0625 + 203{,}0625$$

$$= 512{,}75$$

Jadi $S^2 = \frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{512{,}75}{3} = 170{,}917$

Teorema 5.7

Jika S^2 variansi sampel acak ukuran *n*, maka dapat ditulis

$$S^2 = \frac{n\sum_{i-1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i-1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

Bukti :

Menurut definisi

$$S^2 = \frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\overline{X}x_i + \overline{X}^2)}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{X}^2}{n-1}$$

Dengan mengganti $\overline{X}$ dengan $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ dengan mengalikan penyebut dan pembilang dengan *n*, maka diperoleh rumus perhitungan yang lebih teliti, yakni :

$$S^2 = \frac{n\sum_{i-1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i-1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

5.15 Simpangan Baku (Standar Deviasi)

Definisi 5.9

Simpagan baku sampel, dinyatakan dengan *S*, didefinisikan sebagai akar positif variansi sampel.

Contoh 5.14

Hitunglah simpangan baku dari contoh nilai mahasiswa di atas

Penyelesaian :

$S^2 = 170{,}017$ maka $S = \sqrt{17{,}017} = 12{,}074.$

5.16 Distribusi Sampel

Definisi 5.10

Distribusi peluang suatu statistik disebut distribusi sampel. Simpangan baku distribusi sampel suatu statistik disebut galat baku dari statistik tersebut.

5.17 Distribusi sampel dari Rataan

Teorema 5.8

Jika $\overline{X}$ rataan sampel acak ukuran *n* diambil dari populasi yang terdistribusi normal dengan rataan μ dan variansi σ^2 yang berhingga, maka statistik

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

akan terdistribusi normal dengan rataan 0 dan varians 1

Bukti:

$$X \sim n(x, \mu, \sigma) \Rightarrow z = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim n(z, 0, 1)$$

Untuk $x = \overline{X} \Rightarrow \mu_x = \mu_{\overline{X}}$. Karena $\mu_x = E(X) \Rightarrow \mu_{\overline{X}} = E(\overline{X})$

$$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n} E(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= \frac{1}{n}\left[E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n)\right] = \frac{\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \cdots + \mu_{x_n}}{n} = \mu_x$$

Jadi $x = \overline{X} \Rightarrow \mu_{\overline{X}} = \mu$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = E[(\overline{X} - \mu_{\overline{X}})^2] = E(\overline{X}^2) - [E(\overline{X})]^2$$

$$= E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] - \frac{1}{n^2}\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] - \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right]^2\right)$$

$$= \frac{\sigma^2_{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2} + \cdots + \sigma^2_{x_n}}{n}\right) = \frac{\sigma^2_x}{n}$$

Jadi $\sigma^2_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Sehingga diperoleh

$x = \overline{X} \Rightarrow z = \dfrac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, teorema 6.8 terbukti

Contoh 5.15

Suatu perusahaan memproduksi bola lampu yang umumnya berdistribusi hampir normal dengan rataan 800 jam dan simpangan baku 400 jam. Hitunglah peluangnya bahwa suatu sampel acak dengan 16 bola lampu akan mempunyai umur rata-rata kurang dari 755 jam.

Penyelesaian :

Secara hampiran normal, distribusi sampel $\overline{X}$ akan normal dengan $\mu_{\overline{X}} = 800$. dan $\sigma_{\overline{X}} = 40/\sqrt{16} = 10$ Peluang yang dicari diberikan oleh luas daerah yang dihitami pada gambar di bawah ini. Nilai *z* yang berpadanan dengan $\overline{X}$ = 755 adalah

$$Z = \frac{775-800}{10} = -2{,}5 \text{ dan } \quad P(\overline{X} < 755) = p(Z < -2{,}5) = 0{,}0062.$$

Contoh 5.16

Diketahui populasi yang berdistribusi seragam diskret

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = 0,1,2,3 \\ 0 & untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

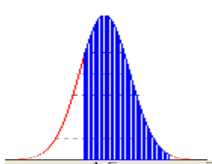
hitunglah peluang bahwa sampel acal berukuran 36, dipilih dengan pengembalian, akan menghasilkan sampel lebih besar dari 1,4 tetapi lebih kecil dari 1,8 bila rataan diukur (dibulatkan) sampai persepuluhan terdekat.

Penyelesaian:

Rataan variansi distribusi seragam dihitung dengan menggunakan rumus pada teorema di atas, dan diperoleh

$$\mu = \frac{0+1+2+3}{4} = \frac{3}{2} \text{ dan}$$

$$\sigma^2 = \frac{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2}{4} = \frac{5}{4}$$



Gambar 5.1 Kurva normal dengan $\mu = \frac{3}{2}$ dan $\sigma = \sqrt{\frac{5}{4}}$

Distribusi sampai $\overline{X}$ dapat dihampiri distribusi normal dengan rataan $\mu_{\overline{X}} = \frac{3}{2}$ dan variansi $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{5}{16}$. Dengan mengambil akarnya diperoleh simpangan baku $\sigma_{\overline{X}} = 0{,}559$. Peluang bahwa $\overline{X}$ lebih besar dari 1,4 tetapi kurang dari 1,8 diberikan oleh luas daerah yang diarsir pada gambar di atas. Keduanya nilai *Z* yang berpadanan dengan x_1 = 1,45 dan x_2 =1,75 adalah

$$z_1 = \frac{1{,}45 - 1.5}{0{,}559} = -0{,}0894$$

$$z_1 = \frac{1{,}75 - 1{,}5}{0{,}559} = 0.4472$$

$$\begin{aligned} P(1{,}45 < \overline{X} < 1{,}75) &= P(-0{,}27 < Z < 1{,}34) \\ &= p(Z < 1{,}34) - P(Z < -0.27) \\ &= 0{,}9099 - 0{,}3936 \\ &= 0{,}5163 \end{aligned}$$

Teorema 5.9

Bila sampel bebas ukuran n_1 dan n_2 diambil secara acak dari dua populasi, diskret atau kontinu, masing-masing dengan rataan μ_1 dan μ_2 dan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 maka distribusi sampel dari selisih rataan $\overline{X}_1$ dan $\overline{X}_2$ berdistribusi hampir normal rataan dan variansi diberikan oleh

$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2$ dan $\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ sehingga statistik

$z = \dfrac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ terdistribusi normal dengan rataan 0 dan varians 1.

Bukti:

Jika $x = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \Rightarrow \mu = \mu_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$

$$\mu = E(x) = E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2 \Rightarrow \mu = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma^2 = E\left((x-\mu)^2\right) = E(x^2) - \left[E(x)\right]^2 = E\left(\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)^2\right) - \left[E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)\right]^2$$

$$= E\left(\overline{X}_1^2 - 2\overline{X}_1\overline{X}_2 + \overline{X}_2^2\right) - \left[E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2)\right]^2$$

$$= E\left(\overline{X}_1^2 - 2\overline{X}_1\overline{X}_2 + \overline{X}_2^2\right) - \left[\left[E(\overline{X}_1)\right]^2 - 2E(\overline{X}_1)E(\overline{X}_2) + \left[E(\overline{X}_2)\right]^2\right]$$

$$= E\left(\overline{X}_1^2\right) - 2E\left(\overline{X}_1\overline{X}_2\right) + E\left(\overline{X}_2^2\right) - \left[E(\overline{X}_1)\right]^2 + 2E(\overline{X}_1)E(\overline{X}_2) - \left[E(\overline{X}_2)\right]^2$$

$$= E\left(\overline{X}_1^2\right) - \left[E(\overline{X}_1)\right]^2 - 2E\left(\overline{X}_1\overline{X}_2\right) + 2E(\overline{X}_1)E(\overline{X}_2) + E\left(\overline{X}_2^2\right) - \left[E(\overline{X}_2)\right]^2$$

$$= E\left(\overline{X}_1^2\right) - \left[E(\overline{X}_1)\right]^2 - 2E\left(\overline{X}_1\overline{X}_2\right) + 2E(\overline{X}_1\overline{X}_2) + E\left(\overline{X}_2^2\right) - \left[E(\overline{X}_2)\right]^2$$

$$= E\left(\overline{X}_1 - \mu_{\overline{X}_1}\right) + 0 + E\left(\overline{X}_2 - \mu_{\overline{X}_2}\right) = E\left(\overline{X}_1 - \mu\right) + E\left(\overline{X}_2 - \mu\right)$$

$$= \sigma^2_{\overline{X}_1} + \sigma^2_{\overline{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Jadi $\sigma^2 = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Akibatnya

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Jadi

$$z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Contoh 5.17

Suatu sampel berukuran n_1 =15 diambi secara acak dari populasi yang berdistribusi normal dengan rataan $\mu_1 = 50$ dan variansi σ_1^2 = 9, dan rataan sampel dihitung. Sampel acak kedua berukuran n_2 =

4 diambil, bebas dari yang pertama, dari populasi lain yang jug berdistribusi normal, dengan rataan $\mu_2 = 40$ dan variansi σ_2^2 =4, dan rataan sampel dihitung. Hitunglah $P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < 8{,}2)$

Penyelesaian:

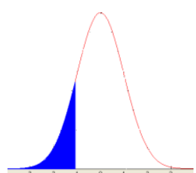
$\mu_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 50 - 40 = 10$ dan variansi

$$\sigma^2_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{9}{5} + \frac{4}{4} = 2{,}8$$

peluang yang dicari dinyatakan oleh luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini. Berpadanan dengan nilai x_1-x_2=8,2 diperoleh

$$z = \frac{8{,}2 - 10}{\sqrt{2{,}8}} = -1{,}08,$$

sehingga $P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < 8{,}2) = P(Z < -1{,}08) = 0{,}1401$



Gambar 5.2 Kurva normal baku dengan Z<-1.08

5.18 Distribusi sampel dari (*n*-1)*S*²/σ^2

Teorema 5.10

Jika peubah acak *X* terdistribusi normal dengan rataan μ dan varians σ^2, maka statistik $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ akan terdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan *v*=*n*-1

Bukti:

Telah diketahui bahwa

$$X \sim N(\mu,\sigma,x) \Rightarrow \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = z^2 \sim \chi^2(1)$$ dan

$$X \sim N(\mu,\sigma,x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n).$$

Sekarang diperhatikan

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu+\overline{X}-\overline{X}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\overline{X})+(\overline{X}-\mu)\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\overline{X})^2+2(x_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu)+(\overline{X}-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2+2(\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2+2(\overline{X}-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\overline{X}\right)+n(\overline{X}-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left((n-1)S^2+2(\overline{X}-\mu)\left(n\overline{X}-n\overline{X}\right)+n(\overline{X}-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\frac{\left(\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\right)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\right)^2$$

$$= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\left(\frac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+z^2$$

Karena $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$ dan $z^2 \sim \chi^2(1)$, maka $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

Contoh 5.18

Suatu pabrik baterai mobil menjamin bahwa baterainya akan tahana rata-rata 3 tahun dengan simpangan baku 1 tahun. Jika lima materainya tahun 1,9; 2,4; 3,5; dan 4,2 tahun, apakah pembuatannya masih yakin, bahwa simpangan baku baterai tersebut 1 tahun?

Penyelesaian :

terlebih dahulu dihitung variansi sampel, yaitu :

$$S^2 = \frac{(5)(48{,}26)-(15)^2}{(5)(4)} = 0{,}815.$$

Kemudian $\chi^2 = \frac{(4)(0{,}815)}{1} = 3{,}26$

merupakan suatu nilai distribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan 4. karena 95% nilai χ^2 dengan derajat kebebasan 4 terletak antara 0,484 dan 11,143, maka nilai perhitungan dengan menggunakan $\sigma^2 = 1$ masih wajar, sehingga tidak ada alasan bagi pembuatannya untuk mencurigai bahwa simpangan baku baterainya bukan 1 tahun.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{Untuk } x = 1,2,3 \\ 0, & \text{Untuk } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Tentukan distribusi peluang peubah acak $Y = X^2 + 1$

2. Misal X peubah acak binomial dengan distribusi peluang

$$f(x) = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{3-x} & \text{Untuk } x = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{Untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukan distribusi peluang peubah acak $Y = X^2 - 1$

3. Misal X_1 dan X_2 peubah acak diskret dengan distribusi multinominal :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \binom{2}{x_1, x_2, 2-x_1-x_2}\left(\frac{1}{4}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}\left(\frac{5}{12}\right)^{2-x_1-x_2} & x_1 = 0,1,2 \text{ dan } x_2 = 0,1,2 \\ 0 & x_1 \text{ dan } x_2 \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukan distribusi peluang gabungan $y_1 = X_1+X_2$ dan $Y_2=X_1-X_2$!

4. Banyaknya jawaban yang salah pada suatu ujian kemampuan salah benar dari dari suatu sampel 15 murid tercatat sebagai berikut 2, 1, 3, 0, 1, 3, 6, 0, 3, 3, 5, 2, 1, 4, dan 2. Hitunglah
   a. rataanya
   b. mediannya
   c. modusnya
5. Lamanya waktu menunggu (dalam menit), sebelum di panggil dokter 10 penderita di Puskesmas Sakra adalah sebagi berikut : 5, 11, 9, 5, 10, 15, 6, 10, 5, dan 10. Jika data ini dianggap sebagi sampel acak, hitunglah :
   a. rentangannya
   b. simpangan bakunya
6. Buktikan bahwa variansi sampel tidak berupah jika suatu konstanta *c* ditambahgkan atau dikurangi dari setiap nilai dari sampel.
7. Buktikan bahwa variansi sampel menjadi c^2 kali nilai semula, jika seiap pengamatan dalam sampel dikalikan dengan *c*!
8. Diketahui populasi seragam diskret $f(x;k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & Untuk\ x = 2,4,6 \\ 0 & Untuk\ x\ lainnya \end{cases}$

   Tentuakn peluangnya bahwa suatu sampel acak ukuran 54, diambil dengan pengembalian , akan menghasilkan rataan sampel lebih besar dari 4,1 tetapi kurang dari 4,4, Misalkan bahwa semua rataan di ukur sampai persepuluhan terdekat.

9. Tinggi 1.000 siswa, secara hampiran, berdistribusi normal dengan rataan 174,5 cm dan simpangan baku 6,9 cm. Jika di ambil 200 sampel acak ukuran 25 dari populasi ini dan semua rataannya di catat sampai persepuluhan cm terdekat, tentukan:
   a. Rataan dan galat buku distribusi sampel dari *X*
   b. Banyaknya rataan sampel yang jatuh antara 172,5 dan 175 *cm*
   c. Banyaknya rataan sampel yang kurang dari 172,0 cm
10. Misalkan X_1 menyatakan rataan sampel acak berukuran n_1, di ambil dengan pengembalian, dari populasi diskret

X	1	3	7
f(*x*)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Dan misalkan $\overline{X}_2$ menyatakan rataan sampel acak ukuran n_2, di ambil dengan pengembalian, dari populasi dikret

X	1	3
f(*x*)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Jika sampel bebas ukuran $n_1 = 125$ dan $n_2 = 100$ di ambil dengan pengembalian, berapakah peluangnya bahwa $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ akan lebih dari 1,84 tetapi kurang dari 2,63 andaikan bahwa rataan sampel dapat di ukur sampai derajat ketelitian yang di inginkan.

11. Nilai pada suatu ujian masuk yang diberikan pada calon mahasiswa di suatu perguruan tinggi selama lima 5 tahun terakhir pendistribusian hampiran normal dengan rataan μ =

74 dan variansi $\sigma^2 = 8$. Apakah nilai $\sigma^2 = 8$ ini masih di anggap valid sebagai nilai variansinya, jika suatu sampel acak sebanyak 20 calon yang mengikuti ujian tersebut tahun ini memperoleh nilai $S^2 = 20$?

12. Buktikan bahwa variansi S^2 untuk sampel acak berukuran n dari populasi normal mengecil jika membesar petunjuk cari dulu variansi $(n - 1)\, S^2 / \sigma^2$.

BAB 6

TAKSIRAN/PENDUGAAN

Inferensi statistik , yaitu pengambilan kesimpulan mengenai populasi berdasarkan hukum statis- tika , berhubungan dengan persoalan pendugaan parameter dan pengujian hipotesis. Informasi yang relevan dari populasi dapat dinyatakan dengan cara memilih ukuran-ukurandeskriptif yang bersifat numerik yang disebut : parameter.

6.1 Pendugaan Titik

Parameter populasi yang biasanya tidak diketahui nilainya dapat diduga dengan menggunakan statistik sampel. Dalam pendugaan titik , kita tentukan suatu nilai tunggal yang mendekati nilaiparameter tersebut. Suatu penduga yang baik adalah penduga yang memenuhi sifat antara lain : takbias dan paling efisien.

Definisi 6.1

Suatu statistik θ dikatakan penduga tak bias dari parameter θ jika : $E(\theta) = \theta$

Contoh 6.1

Misalkan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ saling bebas , masing-masing mempunyai mean μ dan variansi σ^2 .

Penduga tak bias untuk μ dan σ^2 adalah $\bar{X}$ dan S^2 dimana

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ dan $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Definisi 6.2.

Pandang kelas yang terdiri atas semua penduga tak bias bagi parameter θ. Jika dapat dicari suatu penduga ,misalnya θ^* sehingga variansi θ^* terkecil dibandingkan variansi penduga tak bias yang lain , maka θ^* disebut penduga paling efisien bagi θ.

6.2 Pendugaan Interval

Pada pendugaan titik, parameter yang tak diketahui hanya diduga dengan satu nilai, sehingga kecil kemungkinannya untuk menduga parameter secara tepat. Akan lebih baik bila kita dapat menentukan suatu interval dimana kita berharap bahwa nilai parameter yang sebenarnya akan terletak di dalam interval tersebut.

Suatu dugaan/taksiran interval bagi parameter θ adalah sebuah interval yang berbentuk $\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U$, dimana $\hat{\theta}_L$ dan $\hat{\theta}_U$ bergantung pada statistic $\hat{\Theta}$ dan distribusi sampling dari $\hat{\Theta}$. Karena sampel-sampel yang berbeda akan menghasilkan nilai-nilai yang berbeda bagi $\hat{\Theta}$ dan tentunya juga nilai-nilai dari $\hat{\theta}_L$ dan $\hat{\theta}_U$, sehingga ujung-ujung interval merupakan nilai-nilai dari variable-variabel acak $\hat{\Theta}_L$ dan $\hat{\Theta}_U$. Berdasarkan distribusi sampling dari $\hat{\Theta}$, dapat ditentukan $\hat{\Theta}_L$ dan $\hat{\Theta}_U$ sehingga Pr $(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_U)$ = $1-\alpha$, dimana $0<\alpha<1$. Interval $\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U$ yang dihitung dari sampel yang terpilih dinamakan interval kepercayaan $(1-\alpha)$100% bagi θ, dan $1-\alpha$ disebut koefisien kepercayaan atau tingkat kepercayaan.

6.3 Pendugaan Interval untuk Mean Populasi

Definisi 6.3.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ suatu sampel acak yang diambil dari populasi berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka mean sampel $\bar{X}$ akan berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2/n, sehingga

$Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ~ N(0,1)

Kita dapat menyatakan :

$$P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Dengan mensubstitusikan *Z* diperoleh : $P(-z_{\alpha/2} < \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$

Jadi, jika $\bar{x}$ adalah mean dari sampel acak berukuran n yang diambil dari populasi normal dengan variansi σ^2 diketahui, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah :

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dalam hal ini jelas bahwa nilai-nilai dari variable random $\hat{\Theta}_L$ dan $\hat{\Theta}_U$ yang dijelaskan sebelumnya, adalah : $\hat{\theta}_L = \bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ dan

$\hat{\theta}_U = \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Sampel yang berbeda akan menghasilkan nilai $\bar{x}$ yang berbeda sehingga taksiran interval bagi bagi parameter μ yang dihasilkan juga akan berbeda.

Definisi 6.4.:

Misalkan $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ suatu sampel acak yang diambil dari populasi berdistribusi semba- rang dengan mean μ dan variansi σ^2. Jika ukuran sampel *n* cukup besar, mean sampel $\bar{X}$ akan mendekati distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2/n.

Jadi :

$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ mendekati distribusi $N_{(0,1)}$

Dengan cara yang sama pada kasus 1, $P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

sehingga $P(-z_{\alpha/2} < \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$.

Jadi, jika $\bar{x}$ adalah mean dari sampel acak berukuran n (n besar) yang diambil dari populasi sebarang dengan variansi σ^2 diketahui, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah :

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Definisi 6.5

Jika pada kasus 2 σ^2 tidak diketahui, asalkan n besar maka melalui suatu penurunan rumus tertentu, diperoleh :

$Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ mendekati distribusi $N_{(0,1)}$.

Sehingga jika $\bar{x}$ adalah mean dari sampel acak berukuran n (n besar) yang diambil dari populasi sebarang dengan variansi σ^2 tidak diketahui, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah :

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Definisi 6.6

Jika sampel berukuran kecil diambil dari populasi normal dimana variansi σ^2 tidak diketahui, maka interval kepercayaan untuk μ dapat diperoleh dengan menggunakan distribusi t.

t = $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$P\left(-t_{\alpha/2;n-1} < t < t_{\alpha/2;n-1}\right) = 1-\alpha$

Sehingga jika $\bar{x}$ adalah mean dari sampel acak berukuran n (n kecil) yang diambil dari populasi normal dengan variansi σ^2 tidak diketahui, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\,\%$ untuk μ adalah : $\bar{x} - t_{\alpha/2;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$

Contoh 6.2

1. Sebuah mesin minuman ringan diatur sehingga banyaknya minuman yang dikeluarkan berdistribusi normal dengan standar deviasi 1,5 desiliter. Bila suatu sampel acak 36 gelas mempunyai isi rata-rata 22,5 desiliter,tentukan interval kepercayaan 95% untuk rata-rata banyaknya minuman yang dikeluarkan oleh mesin tersebut.

   Penyelesaian:

   X: banyaknya minuman ringan yang dikeluarkan oleh mesin*X~N(* $\mu, (1.5)^2$)

   n = 36 ; σ = 1,5 ; $\bar{x}$ = 22,5

   $(1-\alpha) = 0.95 \rightarrow \alpha = 0,05$; $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

   $\bar{x} - z_{o,025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 22,5 - 1,96 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{36}} = 22,01$; $\bar{x} + z_{0,025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 22,99$

   Jadi interval kepercayaan 95% untuk μ ialah :

   22,01< μ < 22,99

2. Suatu sampel acak 8 batang rokok merk tertentu mempunyai kadar nikotin rata-rata 3,6 miligram dan standar deviasi 0,9 miligram. Tentukan interval kepercayaan 99% untuk kadar nikotin rata-rata dari rokok merk tersebut bila diasumsikan kadar nikotin berdistribusi normal.

   Penyeelesaian:

   X : kadar nikotin dan *X~N(* μ, σ^2)

   n = 8 ; $\bar{x} = 3,6$;*s* = 0,9

   $1-\alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01$; d.b = *n* – 1 = 7 ; $t_{0,005,7} = 3,499$

   $\bar{x} - t_{0,005;7}\frac{s}{\sqrt{n}} = 3,6 - 3,499 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{8}} = 2,49$; $\bar{x} + t_{0,005;7}\frac{s}{\sqrt{8}} = 4,71$

   Jadi interval kepercayaan 99% untuk μ ialah :

   2,49< μ < 4,71

6.4 Pendugaan Interval untuk Beda Dua Mean PopulasiDua Sampel yang Saling Bebas

Definisi 6.7

Misalkan $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ adalah sampel acak berukuran n_1 dari populasi normal yang mempunyai mean μ_1 dan variansi σ_1^2.

$X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ adalah sampel acak berukuran n_2 dari populasi normal yang mempunyai mean μ_2 dan variansi σ_2^2.

Dalam hal ini μ_1 dan μ_2 tidak diketahui, sedangkan σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui.

Penduga titik tak bias untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$, sehingga

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Kita dapat menyatakan bahwa $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$

Dengan mensubstitusikan Z diperoleh :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Jika $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ adalah rata-rata dari dua sampel random yang salin bebas yang berukuran n_1 dan n_2 yang diperoleh dari 2 populasi normal yang saling bebas dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah :

Definisi 6.8.

Misalkan $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ adalah sampel acak berukuran n_1 dari populasi sebarang yang mempunyai mean μ_1 dan variansi σ_1^2. $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ adalah sampel acak berukuran n_2 dari populasi sebarang yang mempunyai mean μ_2 dan variansi σ_2^2. Jika n_1 dan n_2 besar, maka :

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightarrow N_{(0,1)}$$

Kita dapat menyatakan bahwa :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Dengan mensubstitusikan Z diperoleh :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Jika $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ adalah rata-rata dari dua sampel random yang saling bebas yang berukuran n_1 dan n_2(n_1 dan n_2 besar) yang diperoleh dari 2 populasi sebarang yang saling bebas dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah :

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Definisi 6.9.

Jika pada kasus 2, σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui tetapi ukuran sampel n_1 dan n_2 cukup besar , melalui suatu penurunan rumus tertentu,

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$$

Sehinnga jika $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ adalah rata-rata dari dua sampel random yang saling bebas yang berukuran n_1 dan n_2 (n_1 dan n_2 besar) yang diperoleh dari 2 populasi sebarang yang saling bebas dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk $(\mu_1-\mu_2)$ adalah :

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

Defini 6.10

Misalkan $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$: sampel acak dari populasi normal dengan mean μ_1 dan variansi σ_1^2.

$X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$: sampel acak dari populasi normal dengan mean μ_2 dan variansi σ_2^2.

Ukuran sampel n_1 dan n_2 kecil, σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui dan kedua sampel saling bebas.

Definisi 6.11

Bila diasumsikan $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, maka

$t=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$ berdistribusi t dengan d.b = n_1+n_2-2

dimana :

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

adalah variansi rata-rata kedua sampel dan merupakan dugaan titik untuk σ^2.

Kita dapat menyatakan $P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

Dengan mensubstitusikan t , diperoleh :

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Jika $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ adalah rata-rata dari dua sampel random yang saling bebas yang berukuran n_1 dan n_2 (n_1 dan n_2 kecil) yang diperoleh dari 2 populasi normal yang saling bebas dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui tapi diasumsikan sama, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk $(\mu_1-\mu_2)$ adalah :

$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$ $t_{\frac{\alpha}{2}}$: nilai distribusi *t* dengan d.b = n_1+n_2-2

Definisi 6.12

Bila diasumsikan $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

$t = \dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$ mempunyai distribusi yang mendekati distribusi *t* dengan d.b = k dimana

$$k = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Jika $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ adalah rata-rata dari dua sampel random yang saling bebas yang berukuran n_1 dan n_2 (n_1 dan n_2 kecil) yang diperoleh dari 2 populasi normal yang saling bebas dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui tapi diasumsikan tidak sama, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2};k}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2};k}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

6.5 Dua Sampel Berpasangan

Misalkan kita ingin menguji keefektifan suatu diet dengan menggunakan 7 individu yang diamati bobot badannya (dalam kilogram) sebelum dan sesudah mengikuti program diet itu selama 2 minggu. Datanya adalah sebagai berikut :

	1	2	3	4	5	6	7
Bobot Sebelum (X_{1i})	58,5	60,3	61,7	69,0	64,0	62,6	56,7
Bobot Sesudah (X_{2i})	60,0	54,9	58,1	62,1	58,5	59,9	54,4

Kedua sampel diatas tidak bebas karena pengukuran X_{1i} dan X_{2i} ; $i = 1, 2, \cdots 7$ diambil dari individu yang sama. Prosedur inferensi untuk persoalan ini adalah sebagai berikut: Misalkan dua kelompok variabel acak berdistribusi normal $\{X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{1n}\}$ dan $\{X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{2n}\}$ berelemen sama atau berpasangan. Definisikan *n* variabel acak baru,yaitu : $D_i = X_{1i} - X_{2i}$; $i = 1, 2, \cdots n$ Karena X_1 dan X_2 berdistribusi normal, maka D_i juga berdistribusi normal. Jadi $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ merupakan sampel acak berukuran *n* dari suatu populasi normal dengan mean $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ dan variansi σ_D^2 .

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \qquad ; \qquad S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \bar{D}\right)^2$$

$$t = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ_D dapat diperoleh dengan menyatakan :

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Dengan mensubstitusikan *t* ,diperoleh :

$$P\left(\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Jadi interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ_D adalah :

$$\bar{d} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

Contoh 6.12

Lihat data diatas.

	1	2	3	4	5	6	7
Sebelum (x_{1i})	58,5	60,3	61,7	69,0	64,0	62,6	56,7
Sesudah (x_{2i})	60,0	54,9	58,1	62,1	58,5	59,9	54,4
$d_i = x_{1i} - x_{2i}$	-1,5	5,4	3,6	6,9	5,5	2,7	2,3

$\bar{d} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} d_i = 3,5$; $s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{7-1} = 7,7$: $s_d = 2,77$

Dengan $\alpha = 0,05$ diperoleh : $t_{0,025:6} = 2,447$

Jadi interval kepercayaan 95% untuk μ_D adalah :

$$3,5 - (2,447)\frac{2,77}{\sqrt{7}} < \mu_D < 3,5 + (2,447)\frac{2,77}{\sqrt{7}}$$

$$0,94 < \mu_D < 6,06$$

6.6 Pendugaan Proporsi

X suatu variabel binomial (*n,p*) dengan p tidak diketahui. Penduga titik bagi proporsi popu- lasi *p* adalah statistik $\frac{X}{n}$. Jika ukuran sampel *n* cukup besar , maka distribusi dari $\frac{X}{n}$ mendekati distribusi normal dengan mean dan variansi : $\mu_{\frac{X}{n}} = p$ dan

$$\sigma^2_{\frac{X}{n}} = \frac{p(1-p)}{n}$$

Jadi :

$$Z = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \rightarrow N_{(0,1)}$$

Kita dapat menyatakan bahwa :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Substitusikan $Z = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$, maka :

$$P\left(\frac{X}{n} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \frac{X}{n} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

Jika ukuran sampel n cukup besar , harga $\frac{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}$ mendekati $\frac{p(1-p)}{n}$.

Interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk p adalah

$$\frac{x}{n} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{x/n\left(1-x/n\right)}{n}} < p < \frac{x}{n} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{x/n\left(1-x/n\right)}{n}}$$

Contoh 6.13

Dari suatu sampel acak 900 petani disuatu daerah,ternyata 610 orang diantaranya adalah buruhtani. Tentukan interval kepercayaan 90% untuk proporsi buruh tani diantara semua petani didaerah tersebut.

Penyelesaian:

X : banyak buruh tani

n= 900 ; $X \sim b_{(x,900,p)}$; *x* = 61

$1-\alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645$

$\frac{x}{n} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{x/n\left(1-x/n\right)}{n}} = 0,65$; $\frac{x}{n} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{x/n\left(1-x/n\right)}{n}} = 0,71$

$\therefore$ interval kepercayaan 90% untuk p adalah : 0,65 <*p*< 0,71

6.7 Pendugaan Beda Dua Proporsi Populasi

Misalkan ada dua populasi binomial dengan proporsi masing-masing p_1 dan p_2.Dari populasi I diambil sampel acak berukuran n_1 dengan proporsi sampel $\frac{X_1}{n_1}$.

Dari populasi II diambil sampel acak berukuran n_2 dengan proporsi sampel $\frac{X_2}{n_2}$ (X_1 dan X_2 : banyak “sukses”)

Sampel acak yang diambil dari kedua populasi cukup besar dan saling bebas.

Penduga titik untuk beda dua proporsi populasi $p_1 - p_2$ adalah $\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}$.

Ukuran sampel n_1 dan n_2 cukup besar,maka distribusi dari $\frac{X_1}{n_1}-\frac{X_2}{n_2}$ mendekati normal dengan mean dan variansi :

$\mu_{\frac{X_1}{n_1}-\frac{X_2}{n_2}} = p_1 - p_2$ dan $\sigma^2_{\frac{X_1}{n_1}-\frac{X_2}{n_2}} = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$

Jadi :

$$Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}} \longrightarrow N_{(0,1)} \quad \hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} \quad , \quad \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$$

$q_1 = 1-p_1$, $q_2 = 1-p_2$

Kita dapat menyatakan bahwa :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk (p_1-p_2) adalah :

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} < p_1-p_2 < (\hat{p}_1-\hat{p}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

Contoh 6.14:

Disuatu Universitas,diantara 2000 lulusan mahasiswa pria terdapat 114 orang yang lulus dengan IPK ≥ 2,75 , sedangkan diantara 1000 lulusan mahasiswa wanita terdapat 61 orang lulus dengan IPK ≥ 2,75. Tentukan interval kepercayaan 98% untuk beda proporsi lulusan dengan IPK ≥ 2,75 antara mahasiswa pria dan wanita.

Penyelesaian:

X : banyaknya mahasiswa yang lulus dengan IPK ≥ 2,7 $x_1 = 114$, $n_1 = 2000$, $\hat{p}_1 = 0,057$, $\hat{q}_1 = 0,943$

$x_2 = 61$, $n_2 = 1000$, $\hat{p}_2 = 0,061$, $\hat{q}_2 = 0,939$,

$1-\alpha = 0,98 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33$, $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = -0,004$

Interval kepercayaan 98% untuk $p_1 - p_2$: $-0,0254 < p_1 - p_2 < 0,0174$

6.8 Pendugaan Variansi Populasi

Sampel acak berukuran *n* diambil dari populasi normal dengan variansi σ^2. Dari sampel acak dapat dihitung variansi sampel S^2 .Interval kepercayaan untuk σ^2 dapat diperoleh dengan menggunakan :

$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ yang berdistribusi χ^2 dengan d.b = n-1

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Dengan mensubstitusikan χ^2 diperoleh : $P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right] = 1-\alpha$

Interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk σ^2 adalah :

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Contoh 6.15

Kita ingin menduga variansi IQ suatu populasi pelajar SMA disuatu daerah M dengan intervalkepercayaan 90%. Dari sampel acak 20 orang pelajar, diperoleh variansinya adalah 214,1. Diasumsikan bahwa IQ berdistribusi normal.

Penyelesaian:

X : IQ pelajar SMA didaerah M

n = 20 , $s^2 = 214,1$, $\alpha = 0,10$; d.b = 20 – 1 = 19 ;

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2};19} = \chi^2_{0,05;19}$ = 30,144 ; $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};19} = \chi^2_{0,95;19} =$ 10,11

$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,05;19}} = \frac{(19)(214,1)}{30,144}$ = 134,95 ;

$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,95;19}} = \frac{(19)(214,1)}{10,117}$ = 402,09

Jadi interval kepercayaan 90% untuk σ^2 adalah : 134,95 < σ^2 < 402,09

6.9 Pendugaan Ratio Dua Variansi Populasi

Misalkan ada dua populasi normal,masing-masing mempunyai variansi σ_1^2 dan σ_2^2. S_1^2 adalah variansi sampel acak berukuran n_1 yang diambil dari populasi I. S_2^2 adalah variansi sampel acak berukuran n_2 yang dianbil dari populasi II.Kedua sampel acak saling bebas.Penduga titik untuk ratio variansi $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ adalah $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ .Untuk mendapatkan interval kepercayaan untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ kita menggunakan

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}$$

yang berdistribusi *F* dengan derajat bebas $\upsilon_1 = n_1 - 1$ dan $\upsilon_2 = n_2 - 1$

$$P\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}} < F < F_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Dengan mensubstitusikan *F* diperoleh :

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};\upsilon_1,\upsilon_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};\upsilon_1,\upsilon_2}}\right) = 1-\alpha \quad ; \quad \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};\upsilon_1,\upsilon_2}} = F_{\frac{\alpha}{2};\upsilon_2,\upsilon_1}$$

Interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ adalah :

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};\upsilon_1,\upsilon_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{\frac{\alpha}{2};\upsilon_2,\upsilon_1} \; ; \; \upsilon_1 = n_1 - 1, \qquad \upsilon_2 = n_2 - 1$$

Contoh 6.15:

Suatu eksperimen dilakukan untuk membandingkan kecermatan dua merek detektor merkuri dalam mengukur konsentrasi merkuri diudara. Pada suatu siang hari disuatu daerah tertentu dilakukan pengukuran konsentrasi merkuri , 7 pengukuran dengan detektor merek A dan 6 pengukuran dengan detektor merek B. Diasumsikan bahwa hasil pengukuran berdistribusi normal.

Diperoleh data :

MerekA	0,95	0,96	0,82	0,78	0,71	0,86	0.99
Merek B	0,89	0,91	0,94	0,91	0,90	0,89	

Tentukan interval kepercayaan 90% untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ dimana σ_1^2 dan σ_2^2 masing-masing adalah
variansi populasi semua hasil pengukuran dengan detektor merek A dan merek B.

Penyelesaian:

X_1 : hasil pengukuran konsentrasi merkuri dengan menggunakan detektor merek A

X_2 : hasil pengukuran konsentrasi merkuri dengan menggunakan detektor merek B

Dari data dapat dihitung

$\bar{x}_1 = 0,867$; $s_1^2 = 0,010858$; $\upsilon_1 = 7-1=6$ $\bar{x}_2 = 0,907$; $s_2^2 = 0,000346$; $\upsilon_2 = 6-1=5$ $1-\alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10$.

Dari tabel : $F_{0,05;6,5} = 4,95$ dan $F_{0,05;5,6} = 4,39$

Interval kepercayaan 90% untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

$$\frac{0,010858}{0,000346}\left(\frac{1}{4,95}\right) < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{0,010858}{0,000346}(4,39)$$

$$6,3397 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 137,7648$$

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L.J. dan Engelhardt, 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury Press

Bickel, P.j. and Doksum, K.A., 1997, *Mathematical Statistics*, Holden-Day, San Fransisco.

Budiyono, 2009, Statistika Untuk Penelitian, UNS PRESS.

Cassella, G and Berger, R, 1990, *Statistical Inference*, Wadsworth & Brooks/Cole.

Gut, A., 2005, *Probability*: A Graduate Course, Springer.

Hogg, R.V., Kean, J.W., Craig A.T., 2005, *Introduction to Mathematical Statistics*, Prentice Hall.

Larsen, R.J., dan Marx, M.L, 2006, An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications, Perarson International Edition.

Rohatgi, V.R., 1976, An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics, John Wiley.

Ronald E Walpole & Raymond H Myers,1995 , Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan, Edisi ke-4, ITB Bandung.

Roussas, G., 1973, A First Course in Mathematical Statistics, Addison Wesley.

Shao, J., 1999, *Mathematical Statistics*, Springer.

Shorack, G.R, 2000, *Probability for Statisticians*, Springer.

STATISTIKA MATEMATIKA

BERORIENTASI PEMBELAJARAN BERBASIS RISET

Statistika Matematika Berorientasi Pembelajaran Riset difokuskan pada materi peluang, peubah acak, dan distribusi peluang.

Sasaran utama penulisan buku ini adalah mahasiswa Pendidikan Matematika. Statistika dasar dan kalkulus merupakan prasyarat yang diperlukan untuk mempelajari buku ini.

UNIPMA Press
WE GOT IT

Penerbit UNIPMA Press
Universitas PGRI Madiun
Jl. Setiabudi 85 Madiun Jawa Timur 63118
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id

ISBN 978-602-0725-00-0
9 786020 725000